



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και  
Φυσικών Επιστημών

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ  
και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Το πολυώνυμο Alexander

---

**Αντωνίου Χρυσόστομος**

(Α.Μ.09313003)

**Επιβλέπουσα: Λαμπροπούλου Σοφία, καθηγήτρια ΕΜΠ**

**Αθήνα, Ιούνιος 2016**



## Περιεχόμενα

Περίληψη.....	4
Abstract .....	6
1. Εισαγωγή .....	8
2. Κόμβοι και κρίκοι .....	10
2.1 Ορισμός κόμβων και κρίκων .....	10
2.2 Διαγράμματα και ισοδυναμία κόμβων .....	10
2.3 Κινήσεις Reidemeister .....	13
2.4 Κρίκοι, προσανατολισμός και συνδεδεμένο άθροισμα.....	16
2.5 Αριθμός λύσεως, αριθμός γεφυρών, αριθμός διασταυρώσεων .....	21
2.5.1 Αριθμός λύσεως .....	22
2.5.2 Αριθμός γεφυρών.....	23
2.5.3 Αριθμός Διασταυρώσεων.....	24
3. Το πολυώνυμο Alexander: η συνδυαστική μέθοδος .....	26
3.1 Υπολογισμός του πολυωνύμου Alexander .....	26
3.2 Το πολυώνυμο Alexander του $3_1$ . .....	28
3.3 Το πολυώνυμο Alexander του $5_2$ . .....	29
4. Το πολυώνυμο Alexander: η γεωμετρική μέθοδος .....	32
4.1 Η επιφάνεια Seifert .....	32
4.2 Το γένος ενός κόμβου .....	35
4.3 Ο πίνακας Seifert .....	38
4.4 S-ισοδυναμία πινάκων Seifert.....	44
4.5 Το πολυώνυμο Alexander από τον πίνακα Seifert.....	53
5. Το πολυώνυμο Alexander ως αναλλοίωτη.....	56
5.1 Ο δείκτης μιας περιοχής.....	56
5.2 Ο τετραγωνικός πίνακας .....	58
5.3 e-ισοδύναμοι πίνακες .....	60
6. Συμπεράσματα .....	70
Βιβλιογραφία .....	72
Ευχαριστίες.....	74





## Περίληψη

Από τη στιγμή που άρχισαν να μελετώνται οι κόμβοι, γεννήθηκε το ερώτημα το πώς μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι δύο κόμβοι που εξετάζει είναι ίδιοι, ή όχι. Οι αναλλοίωτες των κόμβων, έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας κόμβων και παρέχουν ως ένα σημείο, η κάθε μία με τους δικούς της περιορισμούς, τη δυνατότητα διαχωρισμού των κόμβων.

Η εργασία έχει χωριστεί σε δύο εισαγωγικά και τέσσερα βασικά κεφάλαια, στα οποία γίνεται η ανάπτυξη το πολυωνύμου Alexander. Αναλυτικότερα, στην εισαγωγή εξηγείται ο λόγος για τον οποίο είναι αναγκαία η μελέτη των αναλλοίωτων και το ρόλο που παίζουν στη θεωρία κόμβων. Στο κεφάλαιο 2 παρατίθενται εισαγωγικές πληροφορίες σχετικές με τη θεωρία κόμβων, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση του πολυωνύμου Alexander. Εκτός του ορισμού ενός κόμβου, αναλύονται έννοιες όπως τα διαγράμματα και η ισοδυναμία κόμβων, κινήσεις Reidemeister, όπως επίσης και οι πρώτες αναλλοίωτες (Αριθμός λύσεως, Αριθμός γεφυρών και Αριθμός διασταυρώσεων), μέσω των οποίων φαίνεται γιατί το πολυώνυμο Alexander είναι πιο αποτελεσματικό. Στο κεφάλαιο 3 αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού του πολυωνύμου Alexander, εξετάζοντας τα σημεία διασταυρώσεων του κόμβου, ενώ στο κεφάλαιο 4 γίνεται το ίδιο χρησιμοποιώντας μια γεωμετρική μέθοδο. Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 5, τεκμηριώνεται γιατί το πολυώνυμο Alexander αποτελεί αναλλοίωτη κόμβων και η εργασία ολοκληρώνεται με τα συμπεράσματα που εξάγονται από τη μελέτη αυτή.





## Abstract

From the beginning of the study of knots, the question of how can someone tell if two knots are the same or not was born. Knot invariants have played a significant role in knot theory, providing the ability, each one with its own limitations, to distinguish one knot of another.

This master thesis has been divided in two introductory and four main chapters in which the Alexander polynomial is described. In more detail, the introduction describes the important role invariants play in knot theory. In chapter 2 introductory information is given so the reader can understand the Alexander polynomial. Apart from the definition of a knot, concepts like knot diagrams, knot equivalence and Reidemeister moves are being explained. Furthermore, some invariants are being introduced (Unknotting number, Bridge number, Crossing number) in order to show the importance of the Alexander polynomial. In chapter 3 a method of obtaining the Alexander polynomial is analyzed by examining crossings in knot diagrams and in chapter 4 another, geometrical method for obtaining the Alexander polynomial is being described. In chapter 5 it is proved that the Alexander polynomial is actually a knot invariant and the last chapter states the conclusions regarding the Alexander polynomial.





## 1. Εισαγωγή

Η καθημερινή χρήση του όρου «κόμβος» δεν παραπέμπει σε κάτι ιδιαίτερα μαθηματικό. Ακόμη και όσοι έχουν ασχοληθεί με τοπολογία, δεν μπορούν άμεσα να εντοπίσουν ερωτήσεις που εγείρονται κατά τη μελέτη διαφόρων κόμβων. Παρόλα αυτά, η θεωρία κόμβων κρύβει ισχυρά μαθηματικά. Ο κύριος στόχος της θεωρίας κόμβων είναι να μπορεί να διαχωρίσει τους κόμβους μεταξύ τους. Ακόμα και ο ορισμός αυτού του στόχου, απαιτεί ανώτερα μαθηματικά. Για παράδειγμα, πότε δύο κόμβοι είναι ίδιοι και πότε διαφορετικοί? Αν ένα τόξο του κόμβου μετακινηθεί ελαφρά προς μια πλευρά, θα μιλάμε για τον ίδιο κόμβο? Γι αυτό το λόγο η θεωρία κόμβων επιχειρεί να τεκμηριώσει την ιδέα ότι η μέθοδος που πλέκεται ένας κόμβος είναι αυτό που τον διαχωρίζει από τους υπόλοιπους. Ο κόμβοι που είναι ίδιοι ανήκουν στον ίδιο «τύπο κόμβου» και κάθε τύπος κόμβου μπορεί να έχει πολλούς αντιπροσωπευτικούς κόμβους που φαίνονται διαφορετικοί μεταξύ τους.

Η ανωτέρω μελέτη περιπλέκεται περισσότερο από την ανάγκη μας να αναπαριστούμε τους κόμβους σε δύο διαστάσεις. Ένας κόμβος μπορεί να φαίνεται διαφορετικός ανάλογα με τη γωνία που τον παρατηρεί κανείς, το οποίο επεκτείνει την ανάγκη να διαχωρίσουμε όχι μόνο τους κόμβους μεταξύ τους, αλλά και να εξετάσουμε ποιες προβολές ανήκουν στον ίδιο κόμβο.

Για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τοπολογικές μεθόδους. Παρατηρώντας τόσο τον κόμβο, όσο και τον χώρο που τον περικλείει, μπορούμε να ορίσουμε σχέσεις μεταξύ όμοιων κόμβων. Αυτές οι σχέσεις είναι της μορφής τοπολογικών αναλλοίωτων. Αναλλοίωτες μπορεί να είναι αριθμοί, πολυώνυμα ή αλγεβρικές δομές. Η ιδιότητα μιας αναλλοίωτης είναι να δίνει για παράδειγμα ως αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό, για δύο κόμβους του ίδιου τύπου. Δύο κόμβοι διαφορετικού τύπου, θα δώσουν κατά κανόνα διαφορετικούς αριθμούς, πολυώνυμα ή αλγεβρικές δομές. Έτσι μπορούμε να υποστηρίξουμε με βεβαιότητα ότι δύο κόμβοι είναι διαφορετικοί, αν από αυτούς προκύπτουν διαφορετικές





αναλλοιώτες. Ωστόσο, το αντίθετο δε συμβαίνει πάντα καθώς από διαφορετικούς κόμβους μπορούν να προκύπτουν ίδιες αναλλοιώτες.

Σε αυτήν την εργασία θα μελετηθεί μια συγκεκριμένη αναλλοιώτη, το πολυώνυμο *Alexander*. Το πολυώνυμο αυτό μπορεί να προκύψει με πολλές μεθόδους. Αυτές οι οποίες θα αναλυθούν στην παρούσα, είναι δύο, μια εξετάζοντας τα σημεία διασταύρωσης στο διάγραμμα ενός κόμβου και μια χρησιμοποιώντας γεωμετρικές μεθόδους.

Προτού αναλυθούν όμως αυτές, θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια του κόμβου.



## 2. Κόμβοι και κρίκοι

### 2.1 Ορισμός κόμβων και κρίκων

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να οριστεί ένας κόμβος, οι οποίοι μπορεί να είναι περιγραφικοί ή μαθηματικοί. Η ευκολότερη προσέγγιση είναι να θεωρηθεί ως κόμβος ένα νήμα το οποίο έχει διασταυρωθεί με τον εαυτό του αρκετές φορές και στη συνέχεια ενώνονται τα δύο ελεύθερά του άκρα. Ωστόσο, η πιο ορθή και μαθηματική προσέγγιση είναι η εξής:

**Ορισμός 2.1.1:** Έστω  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  και  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  συνάρτηση. Ο  $f$  καλείται ομοιομορφισμός αν είναι ένα προς ένα, συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφη εικόνα. Τα σύνολα  $A$  και  $B$  καλούνται τότε ομοιομορφικά.

Αν  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  και υπάρχει ομοιομορφισμός  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοιος ώστε  $h(A) = B$ , τότε γράφουμε  $h: (\mathbb{R}^3, G_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, G_2)$ .

**Ορισμός 2.1.2** Έστω  $G$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ . Μια εμφύτευση του  $G$  είναι η εικόνα ενός ομοιομορφισμού  $h: G \rightarrow G'$ , όπου  $G'$  επίσης υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ .

**Ορισμός 2.1.3** Ένας κόμβος  $K$  είναι μια εμφύτευση του κύκλου  $S^1$  στο χώρο  $\mathbb{R}^3$  ή στη σφαίρα  $S^3$ . Ένας κρίκος  $L$  είναι μια εμφύτευση από  $N$  αντίγραφα του  $S^1$  στο χώρο  $\mathbb{R}^3$  ή στη σφαίρα  $S^3$ .

Με τον όρο «κόμβος» θα εννοούμε κόμβους και κρίκους εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά. Το γεγονός ότι ένας κόμβος είναι εικόνα ομοιομορφισμού του κύκλου σημαίνει ότι δεν επιτρέπονται αυτοτομές.

### 2.2 Διαγράμματα και ισοδυναμία κόμβων

Ένας κόμβος είναι ένα αντικείμενο τριών διαστάσεων. Παρόλα αυτά, για λόγους ευκολίας, κρίνεται σκόπιμο να αναπαρίστανται και σε δύο διαστάσεις. Έχοντας έναν κόμβο στο χώρο, μπορούμε να επιλέξουμε ένα διάνυσμα στο  $\mathbb{R}^3$  και να τον προβάλλουμε σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο



σε αυτό το διάνυσμα. Το αποτέλεσμα είναι μια επίπεδη αναπαράσταση του κόμβου. Ωστόσο, μέσω αυτής της διαδικασίας χάνονται σημαντικές πληροφορίες. Συγκεκριμένα, τα τόξα τα οποία επικαλύπτονται δεν μπορούν να διαχωριστούν στην εν λόγω προβολή. Για να λυθεί αυτό, αναπαριστούμε το τόξο του κόμβου που κατευθύνεται κάτω από τη διασταύρωση ως μια διακεκομμένη γραμμή στο σημείο της διασταύρωσης. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι το διάγραμμα του κόμβου. Τυπικά διαγράμματα του τετριμμένου κόμβου και του κόμβου trefoil είναι αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 2.1.

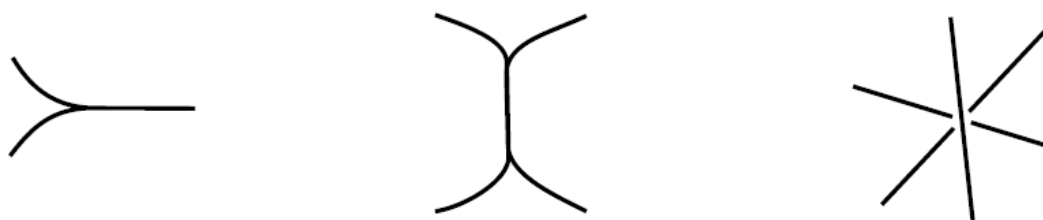


Σχήμα 2.1 Αριστερά είναι το διάγραμμα του τετριμμένου κόμβου. Δεξιά είναι το διάγραμμα του κόμβου trefoil. Οι διακεκομμένες γραμμές στις διασταυρώσεις δείχνουν ότι αυτά τα τόξα του κόμβου βρίσκονται κάτω από το υπόλοιπο τμήμα του κόμβου.

Στα διαγράμματα που αναφέραμε, η περίπτωση όπου δύο τόξα του κόμβου ενώνονται σε ένα σημείο της προβολής αποφεύγεται, καθώς κάθε τέτοια προβολή είναι απείρως κοντά σε μια άλλη, κάτι που δε συμβαίνει. Επίσης, αποφεύγεται να εφάπτονται δύο τόξα του κόμβου και η περίπτωση ένα τόξο να καταλήγει σε σημείο και στη συνέχεια να επιστρέφει από τον ίδιο δρόμο.

**Ορισμός 2.2.1:** Η προβολή ενός κόμβου ονομάζεται κανονική, όταν οι διασταυρώσεις της πραγματοποιούνται μόνο σε διπλά σημεία και επιπλέον, αν οι διασταυρώσεις αυτές είναι εγκάρσιες.

Παράδειγμα μιας κανονικής προβολής ενός κόμβου είναι το Σχήμα 2.1. Σε αυτά δε θα συναντήσουμε περιπτώσεις όπως αυτές τους Σχήματος 2.2



Σχήμα 2.2

Έχοντας έναν κόμβο, μπορούμε να πάρουμε ένα τόξο και να του προσθέσουμε μια συστροφή. Με αυτόν τον τρόπο αλλάζει η εμφύτευση του κόμβου στο χώρο και συνεπώς το διάγραμμά του. Παρόλα αυτά, ο κόμβος παραμένει ο ίδιος. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να οριστεί η ισοδυναμία κόμβων, αρχικά χρησιμοποιώντας τοπολογία και στη συνέχεια βασιζόμενοι σε διαγράμματα κόμβων.

**Ορισμός 2.2.2:** Ισοτοπία στο χώρο είναι μια ομοτοπία  $H: \mathbb{R}^3 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε  $H[x,0]$  είναι η ταυτότητα και  $H[x,t]$  είναι ένας ομοιομορφισμός για όλα τα  $t$  στο  $[0,1]$ . Επίσης, αναπαριστούμε  $H[x,1]$  με  $h(x)$ .

**Ορισμός 2.2.3:** Έστω  $K_1$  και  $K_2$  δύο κόμβοι στο  $\mathbb{R}^3$ , τότε ο  $K_1$  είναι ισοδύναμος με τον  $K_2$  αν ο  $K_1$  είναι ισοτοπικός στο χώρο με τον  $K_2$ . Δηλαδή, υπάρχει χωρική ισοτοπία  $H$ , έτσι ώστε  $h(K_1) = K_2$ .

Η έννοια της ισοδυναμίας των κόμβων μας δίνει τη δυνατότητα να διαχωρίσουμε τους κόμβους σε τύπους. Όταν λέμε ότι οι κόμβοι είναι διαφορετικοί, εννοούμε ότι είναι διαφορετικού τύπου. Ωστόσο, ο ορισμός του κόμβου αναφέρεται σε συγκεκριμένη εμφύτευση του  $S^1$  στο  $\mathbb{R}^3$  και δύο κόμβοι του ίδιου τύπου είναι διαφορετικοί αν έχουν διαφορετικές εμφυτεύσεις. Με το σύμβολο  $[K]$  αναφερόμαστε σε έναν τύπο κόμβου. Παρόλα αυτά συνήθως εννοούμε και συγκεκριμένο κόμβο. Επιπρόσθετα, οι κόμβοι αναπαριστούνται ως  $n_m$ , όπου  $n$  είναι ο αριθμός διασταυρώσεων του  $K$  και  $m$  καθορίζει σε ποιον  $n$ -διασταυρώσεων κόμβο αναφερόμαστε.

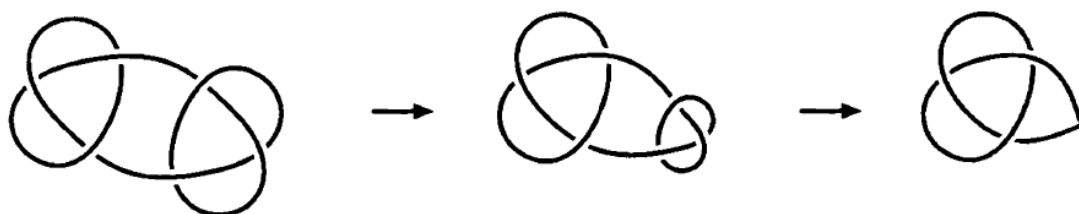
Για παράδειγμα, ο τύπος κόμβου που είναι ο απλός κύκλος στο  $\mathbb{R}^3$  και ονομάζεται unknot ή trivial knot (τετριμμένος κόμβος), αναπαρίσταται ως  $0_1$  και είναι ο πρώτος (και μοναδικός) κόμβος με μηδέν διασταυρώσεις.



Η δεύτερη προσέγγιση της ισοδυναμίας κόμβων σχετίζεται με τρεις πράξεις στα διαγράμματά τους, που ονομάζονται κινήσεις Reidemeister. Όπως ο κόμβος κινείται στο χώρο ή αλλάζει λόγω χωρικής ισοτοπίας, η προβολή του αλλάζει μέσω των κινήσεων αυτών, οι οποίες θα αναλυθούν στη συνέχεια.

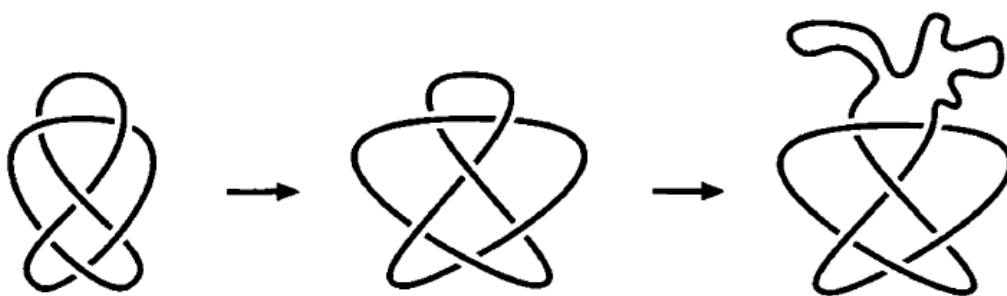
### 2.3 Κινήσεις Reidemeister

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο προβολές του ίδιου κόμβου. Εάν ο κόμβος είναι φτιαγμένος από ένα νήμα σύμφωνα με την πρώτη προβολή, τότε θα πρέπει να είναι δυνατό μέσω της αναδιάταξης του νήματος ο κόμβος να φτάσει στη δεύτερη προβολή. Η αναδιάταξη του νήματος, δηλαδή η κίνησή του σε έναν τρισδιάστατο χώρο χωρίς ωστόσο να περάσει από τον εαυτό του λέγεται ισοτοπία στο χώρο. Επισημαίνεται ότι δεν επιτρέπεται να συρρικνωθεί ένα τμήμα του κόμβου έως ότου μετατραπεί σε ένα σημείο (Σχήμα 2.3). Συνεπώς, δεν είναι δυνατό να εξαλειφθεί ένα τμήμα του κόμβου με αυτόν τον τρόπο, κατ'αντίστοιχο τρόπο με τον οποίο είναι αδύνατο να λυθεί ένας κόμβος, απλά τραβώντας τα δύο άκρα του.



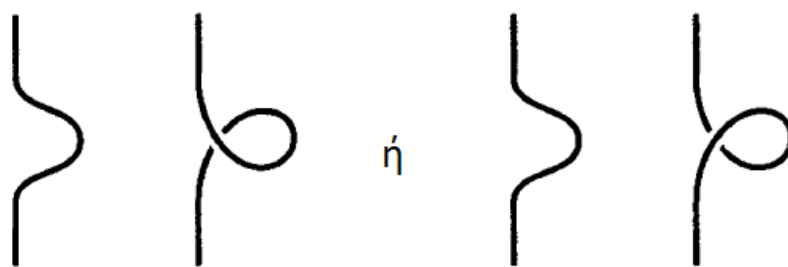
Σχήμα 2.3

Μια παραμόρφωση της προβολής ενός κόμβου ονομάζεται ισοτοπία επιπέδου αν παραμορφώνει το επίπεδο προβολής σαν να ήταν κατασκευασμένο από ελαστικό με σχεδιασμένη την προβολή επάνω του (Σχήμα 2.4). Ο όρος ισοτοπία επιπέδου χρησιμοποιείται επειδή ο κόμβος παραμορφώνεται μόνο εντός του επιπέδου προβολής.

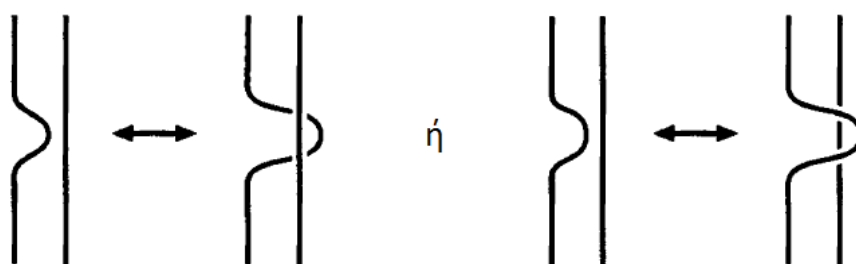


Σχήμα 2.4

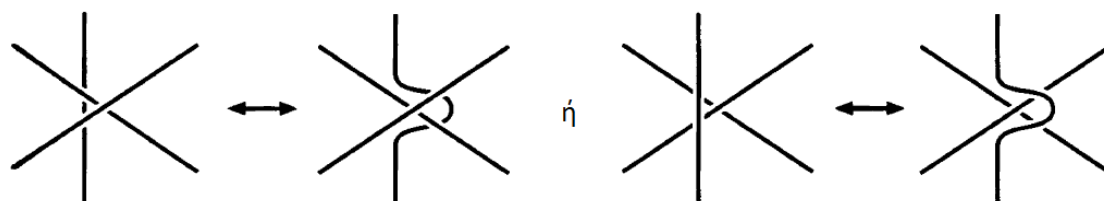
Μια κίνηση Reidemeister είναι ένας τρόπος να τροποποιηθεί η προβολή του κόμβου έτσι ώστε να αλλάξει η θέση μεταξύ των διασταυρώσεων. Η πρώτη κίνηση Reidemeister επιτρέπει να εισάγουμε ή να αφαιρέσουμε μία συστροφή στον κόμβο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5. Υποθέτουμε ότι η προβολή δεν αλλάζει εκτός του σημείου που φαίνεται στην εικόνα. Η δεύτερη κίνηση Reidemeister μας επιτρέπει είτε να προσθέσουμε δύο διασταυρώσεις ή να αφαιρέσουμε δύο διασταυρώσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Η τρίτη κίνηση Reidemeister μας επιτρέπει να μετακινήσουμε ένα τόξο του κόμβου από τη μία πλευρά μιας διασταύρωσης στην άλλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.5



Σχήμα 2.6



Σχήμα 2.7

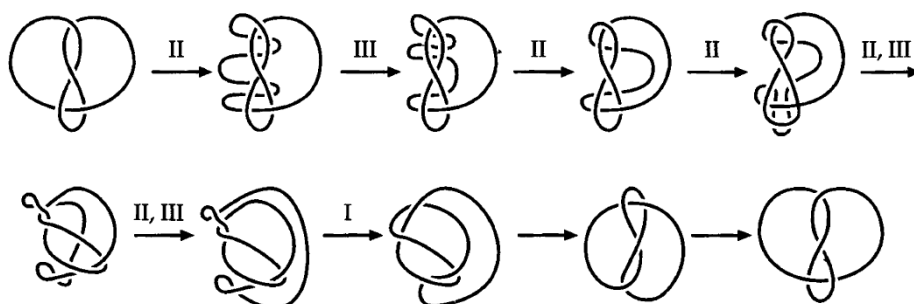
Επισημαίνεται ότι παρόλο που όλες οι προαναφερθείσες κινήσεις αλλάζουν την προβολή του κόμβου, ο κόμβος στον οποίο αναφέρεται η προβολή δεν αλλάζει. Κάθε μια από τις κινήσεις Reidemeister είναι ισοτοπικές στο χώρο.

Το 1926 ο μαθηματικός Kurt Reidemeister απέδειξε ότι αν έχουμε δύο διαφορετικές προβολές του ίδιου κόμβου, μπορούμε από τη μία προβολή να καταλήξουμε στην άλλη μέσω διαδοχικών κινήσεων Reidemeister και ισοτοπιών στο επίπεδο. Για παράδειγμα οι δύο προβολές στο Σχήμα 2.8 αναφέρονται στον ίδιο κόμβο. Επομένως υπάρχει μια σειρά από κινήσεις Reidemeister μέσω των οποίων μπορούμε ξεκινώντας από τη πρώτη προβολή να καταλήξουμε στην άλλη.



Σχήμα 2.8

Αντίστοιχα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο figure eight κόμβος είναι ισοδύναμος με την κατοπτρική του εικόνα, δηλαδή αυτόν που προκύπτει αν αλλάξουμε σε κάθε διασταύρωσή του τα τόξα, Σχήμα 2.9



Σχήμα 2.9

## 2.4 Κρίκοι, προσανατολισμός και συνδεδεμένο άθροισμα

Μέχρι στιγμής επικεντρωθήκαμε στους κόμβους. Ωστόσο υπάρχει ένα παρόμοιο αντικείμενο, το οποίο ονομάζεται κρίκος. Οι κρίκοι θα χρειαστούν για την ανάπτυξη των επιφανειών Seifert που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Οι ιδιότητες των κόμβων σε πολλές περιπτώσεις επεκτείνονται και στους κρίκους και η προσέγγισή τους είναι κοινή.

**Ορισμός 2.4.1:** Ένας κρίκος ή ένας  $n$ -συνιστώσων κρίκος είναι μια εμφύτευση  $n$  αντιγράφων του  $S^1$  στο  $\mathbb{R}^3$ . Κάθε κόμβος είναι ένας 1-συνιστώσας κρίκος.

**Ορισμός 2.4.2:** Ένας κρίκος είναι ένα σύνολο από συνδεδεμένους και πεπλεγμένους βρόγχους.

Επέκταση των κρίκων είναι οι χωριστοί κρίκοι, οι οποίοι είναι κρίκοι με πολλές συνιστώσες οι οποίες δεν είναι μπλεγμένες μεταξύ τους.

**Ορισμός 2.4.3:** Έστω  $L$  ένας κρίκος με δύο συνιστώσες,  $L_1$  και  $L_2$ . Ο  $L$  είναι χωριστός κρίκος εάν ο  $L_1$  μπορεί να εμφυτευτεί σε μια τοπολογική σφαίρα, η οποία δεν τέμνει τον  $L_2$ .

Δύο κόμβοι οι οποίοι βρίσκονται ο ένας δίπλα στον άλλο στο χώρο χωρίς να μπλέκονται μεταξύ τους είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Εφεξής ο όρος κρίκος θα χρησιμοποιείται με μια πιο ευρεία έννοια και θα περιλαμβάνει την





κατηγορία των κόμβων και των χωριστών κρίκων, εκτός και αν ορίζεται σαφώς διαφορετικά.



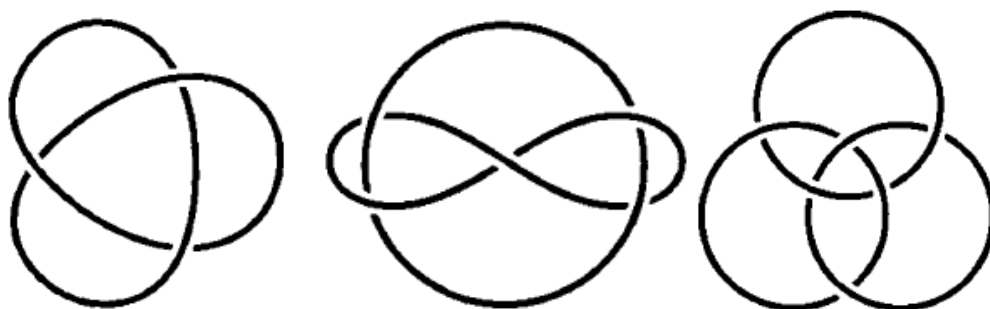
Σχήμα 2.10

Δύο κρίκοι μπορούν να θεωρηθούν ίδιοι αν μπορούμε να παραμορφώσουμε τον έναν κρίκο έτσι ώστε να προκύψει ο δεύτερος, χωρίς να χρειαστεί να τμηθεί κανένας εκ των βρόχων με τον εαυτό του ή με οποιονδήποτε άλλο. Δύο προβολές ενός από τους πιο απλούς κρίκους είναι ο Whitehead κρίκος και φαίνεται στο Σχήμα 2.11. Φαίνεται ότι αποτελείται από δύο βρόχους συνδεδεμένους μεταξύ τους.



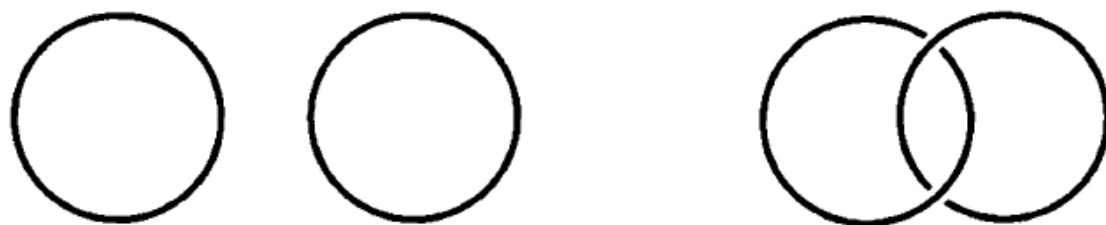
Σχήμα 2.11

Το αντικείμενο ενδιαφέροντος είναι οι κρίκοι που δεν μπορούν να διαχωριστούν. Ένας αρχικός τρόπος να αποφανθεί κανείς αν δύο κρίκοι είναι ίδιοι, είναι να μετρήσει τις συνιστώσες. Αν ο αριθμός των συνιστωσών είναι διαφορετικός, τότε οι δύο κρίκοι πρέπει να είναι διαφορετικοί. Έτσι λοιπόν, ο κόμβος trefoil, ο Whitehead κρίκος και οι δακτύλιοι Borromean που απεικονίζονται στο Σχήμα 2.12 πρέπει να είναι διαφορετικοί κρίκοι.



Σχήμα 2.12

Εξετάζοντας δύο προβολές κρίκων, οι οποίες έχουν τον ίδιο αριθμό από συνιστώσες, θα θέλαμε να ξέρουμε αν αυτές αναπαριστούν τον ίδιο κρίκο ή όχι. Στο Σχήμα 2.13 αναπαριστούμε τους δύο πιο απλούς κρίκους με δύο συνιστώσες. Ο πρώτος είναι ο unlink (ή τετριμμένος κρίκος) δύο συνιστωσών και ο δεύτερος είναι ο Hopf link. Μια αρχική διαφορά μεταξύ των δύο είναι ότι ο τετριμμένος κρίκος είναι διαχωρίσιμος, αφού οι δύο συνιστώσες του μπορούν να διαχωριστούν από ένα επίπεδο. Αντίθετα, στον Hopf link, οι δύο συνιστώσες συνδέονται σε ένα σημείο. Μια μέθοδος η οποία υπολογίζει αριθμητικά πόσο πολύ είναι συνδεδεμένες δυο συνιστώσες είναι ο αριθμός συνέλιξης (linking number).

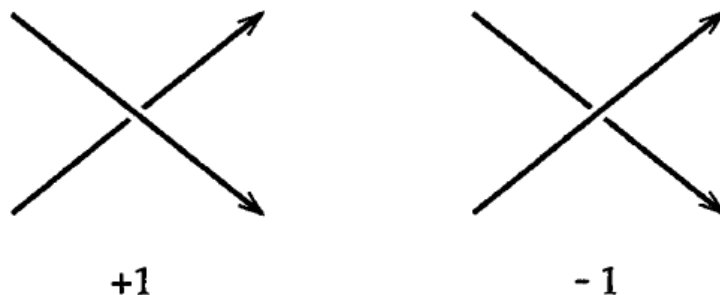


Σχήμα 2.13

Έστω  $M$  και  $N$  δύο συνιστώσες ενός κρίκου. Ορίζουμε έναν προσανατολισμό σε κάθε μία από αυτές. Τότε, σε κάθε διασταύρωση μεταξύ των δύο συνιστωσών, μία συνθήκη εκ των δύο του Σχήματος 2.14 θα ικανοποιείται. Ορίζουμε ως  $+1$  κάθε διασταύρωση της πρώτης μορφής και  $-1$  κάθε διασταύρωση της δεύτερης μορφής. Διευκρινίζεται ότι αν μια διασταύρωση είναι της πρώτης μορφής, τότε περιστρέφοντας το από κάτω τόξο σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ευθυγραμμίζεται με το από πάνω τόξο έτσι ώστε οι κατευθύνσεις τους να ταυτίζονται. Ομοίως, αν μια διασταύρωση είναι της δεύτερης μορφής, τότε περιστρέφοντας το

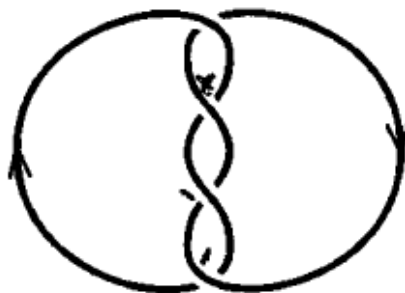


από κάτω τόξο αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ευθυγραμμίζεται με το από πάνω τόξο έτσι ώστε οι κατευθύνσεις τους να ταυτίζονται.



Σχήμα 2.14

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το άθροισμα των  $+1$  και  $-1$  όλων των διασταυρώσεων μεταξύ  $M$  και  $N$  και το διαιρούμε δια  $2$ . Αυτός είναι ο αριθμός συνέλιξης. Δεν υπολογίζουμε τις διασταυρώσεις μεταξύ μιας συνιστώσας και του εαυτού της. Για το τετριμμένο κρίκο ο αριθμός συνέλιξης των δύο συνιστωσών είναι  $0$ . Για το Hopf link, ο αριθμός συνέλιξης θα είναι  $1$  ή  $-1$ , ανάλογα με τον προσανατολισμό των δύο συνιστωσών. Οι δύο συνιστώσες ενός προσανατολισμένου κρίκου που απεικονίζονται στο Σχήμα 2.15 έχουν αριθμό συνέλιξης  $2$ . Αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό ενός μόνο εκ των δύο συνιστωσών, θα παρατηρήσουμε ότι ο νέος αριθμός συνέλιξης πολλαπλασιάζεται με το  $-1$ . Συνεπώς αν πάρουμε την απόλυτη τιμή του αριθμού συνέλιξης θα διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό των δύο συνιστωσών.

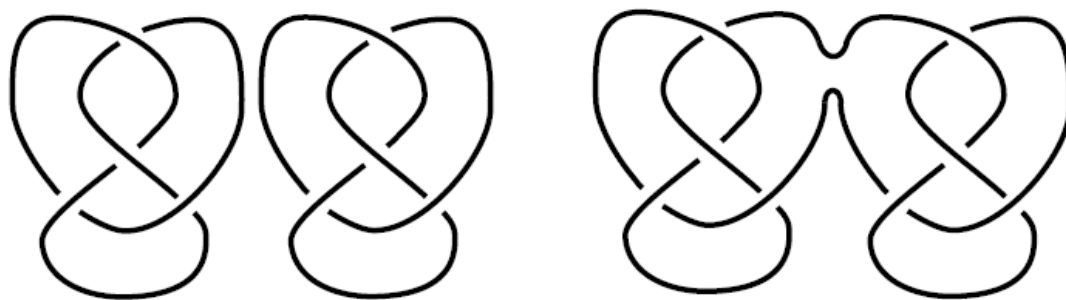


Σχήμα 2.15



Στην προηγούμενη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε μια συγκεκριμένη προβολή του κρίκου για να υπολογιστεί ο αριθμός συνέλιξης. Αποδεικνύεται ότι οι κινήσεις Reidemeister δεν επηρεάζουν τον αριθμό συνέλιξης. Με δεδομένο ότι από τη μία προβολή μπορούμε να καταλήξουμε στην άλλη μέσω διαδοχικών κινήσεων Reidemeister, προκύπτει ότι ο αριθμός συνέλιξης θα είναι πάντα ο ίδιος, ανεξάρτητα από την προβολή του κρίκου που θα επιλεγεί για να υπολογιστεί.

Πολλές φορές χρειάζεται να διαχωρίσουμε τον κόμβο σε δύο μικρότερους, για τους οποίους έχουμε περισσότερες πληροφορίες, ή να δημιουργήσουμε έναν μεγαλύτερο κόμβο αποτελούμενο από δύο μικρότερους. Η διαδικασία σύνδεσης δύο κόμβων  $K_1$  και  $K_2$  για να δημιουργηθεί ένας μεγαλύτερο κόμβος,  $K$ , απεικονίζεται στο σχήμα 2.16, αναφέρεται ως συνδεδεμένο άθροισμα των  $K_1$  και  $K_2$  και αναπαρίσταται ως  $K=K_1\#K_2$ . Η διαδικασία περιλαμβάνει το σπάσιμο ενός τόξου σε κάθε έναν από τους δύο κόμβους και την επανένωση άκρων του τόξου του ενός κόμβου στα αντίστοιχα κομμένα άκρα του τόξου του άλλου. Η αντίστροφη διαδικασία, κατά την οποία ο ένας κόμβος διασπάται σε δύο μικρότερους ονομάζεται *factorizing*. Για να γίνει αυτό, το ένα τμήμα του κόμβου θα πρέπει να περιέχεται σε μια τοπολογική σφαίρα η οποία διασταυρώνεται με τον κόμβο σε μόνο δύο σημεία. Αυτά είναι τα δυο σημεία του κόμβου τα οποία κόβονται και ενώνονται ξανά για να δημιουργήσουν τους δύο κόμβους.

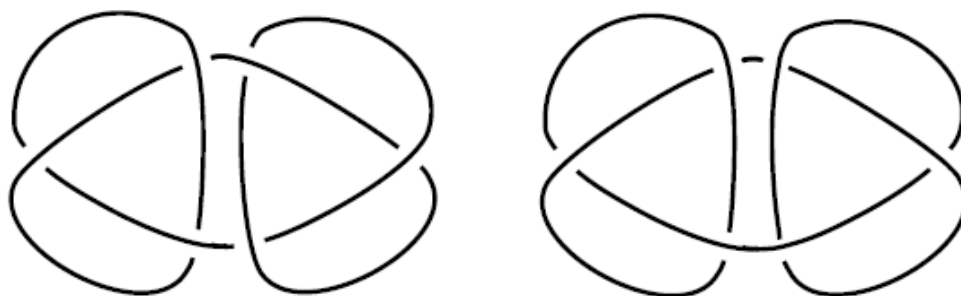


Σχήμα 2.16

Παρόλο που φαίνεται ότι από το συνδεδεμένο άθροισμα δύο κόμβων θα προκύψουν διαφορετικοί κόμβοι, ανάλογα με το που θα γίνει η σύνδεση, αυτό δεν ισχύει. Για να αποδειχτεί αυτό, υποθέτουμε ότι συρρικνώνεται



ένας από τους δύο κόμβους, πχ ο  $K_1$  στο συνδεδεμένο άθροισμα, μέχρι το μέγεθός του να είναι πολύ μικρό σε σχέση με τον  $K_2$ . Σε αυτήν την περίπτωση θα μπορεί να γλιστρήσει σε οποιοδήποτε σημείο του  $K_2$ , χωρίς να αλλάξει η μορφή του συνδεδεμένου αθροίσματος κόμβου. Συνεπώς, το που θα γίνει η διαδικασία της ένωσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Παρόλα αυτά, αν μιλάμε για προσανατολισμένους κρίκους, τότε αυτή η πράξη έχει ως αποτέλεσμα να παράγονται διαφορετικοί κρίκοι. Για παράδειγμα το συνδεδεμένο άθροισμα δύο κόμβων trefoil παράγει τον κόμβο granny, ενώ το συνδεδεμένο άθροισμα ενός trefoil με τον αντίστροφο του παράγει τον τετράγωνο κόμβο. Οι δύο κόμβοι αυτοί φαίνονται στο Σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.17

Η πράξη του να λαμβάνουμε το συνδεδεμένο άθροισμα κόμβων, καθώς και το factorizing των κόμβων μας επιτρέπει να ορίσουμε τους πρώτους και τους σύνθετους κόμβους.

**Ορισμός 2.4.4.** Ένας κόμβος είναι σύνθετος αν είναι το συνδεδεμένο άθροισμα δύο ή περισσότερων μη τετριμμένων κόμβων.

## 2.5 Αριθμός λύσεως, αριθμός γεφυρών, αριθμός διασταυρώσεων

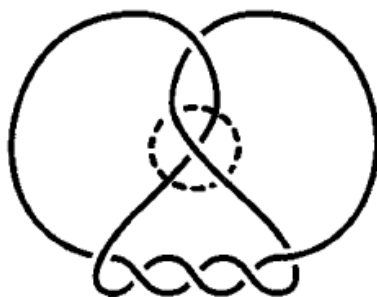
Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν ορισμένες αναλλοίωτες κόμβων με σκοπό να διασαφηνιστεί η χρησιμότητα του πολυώνυμου Alexander το οποίο θα περιγραφεί στη συνέχεια.



### 2.5.1 Αριθμός λύσεως

**Ορισμός 2.5.1.1:** Αριθμός λύσεως  $n$  είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων που πρέπει να αλλαχθούν σε έναν κόμβο  $K$ , ούτως ώστε αυτός να μετασχηματιστεί στον τετριμμένο. Ο αριθμός λύσεως του κόμβου  $K$  συμβολίζεται με  $u(K)$ .

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν αλλάξουμε μια διασταύρωση στην προβολή του κόμβου  $7_2$  που φαίνεται στο Σχήμα 2.18, αυτός μετατρέπεται στον τετριμμένο κόμβο. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός λύσεως του κόμβου  $7_2$  είναι ίσος με 1.



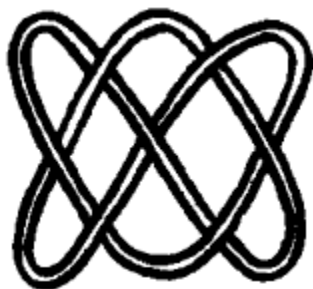
Σχήμα 2.18

Στην προηγούμενη περίπτωση αλλάχθηκε η διασταύρωση σε μία προβολή του κόμβου  $7_2$ . Αυτό όμως δε μας εμποδίζει να προβούμε σε αλλαγή μιας διασταύρωσης, στη συνέχεια να εφαρμόσουμε μια χωρική ισοτοπία μετασχηματίζοντας την προβολή, να εφαρμόσουμε νέα αλλαγή σε μια διασταύρωση κοκ, έως ότου να εκτελέσουμε τις  $n$  αλλαγές και να προκύψει ο τετριμμένος κόμβος.

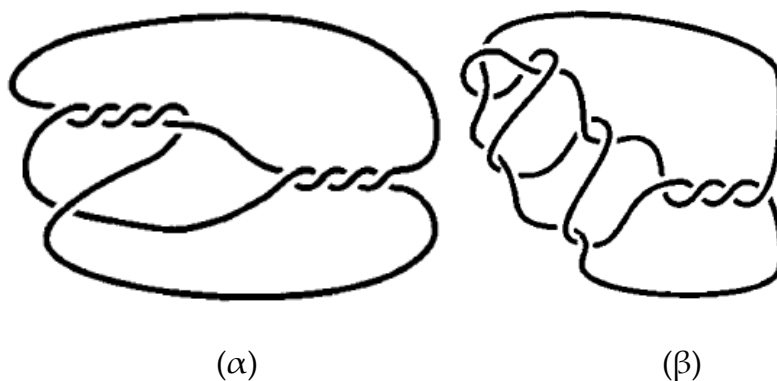
Γενικά είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί ο αριθμός λύσεως ενός κόμβου, Για παράδειγμα, αν αλλάξουμε διασταυρώσεις στην προβολή του  $7_4$  που φαίνεται στο Σχήμα 2.19, προκύπτει ότι ο αριθμός λύσεως είναι ίσος με 2. Στην πραγματικότητα είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι αυτός είναι και ο ελάχιστος αριθμός αλλαγών που απαιτείται. Θα μπορούσε να υπάρχει άλλη προβολή, τέτοια ώστε αλλάζοντας μόνο μια διασταύρωση να προκύψει ο τετριμμένος κόμβος. Για να αποδειχτεί αυτό απαιτείται αρκετή δουλειά και μάλιστα δεν υπάρχει μια ενιαία μέθοδος που να το



αντιμετωπίζει αυτό για όλους τους κόμβους. Τέλος θα περίμενε κανείς ότι ο αριθμός λύσεως υπολογίζεται σε μια προβολή του κόμβου με τον ελάχιστο αριθμό διασταυρώσεων. Ούτε αυτό όμως ισχύει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.20. Στο Σχήμα 2.20 (α) έχουμε την προβολή ενός κόμβου, η οποία αποδεικνύεται ότι έχει τον ελάχιστο αριθμό διασταυρώσεων και είναι ίσος με 10. Ο ελάχιστος αριθμός αλλαγών διασταυρώσεων σε αυτήν την περίπτωση για να μετατραπεί η προβολή στον τετριμμένο κόμβο είναι 3, συνεπώς θα περίμενε κανείς ο αριθμός λύσεως να είναι 3. Ωστόσο μια άλλη προβολή του ίδιου κόμβου φαίνεται στο Σχήμα 2.20 (β), στην οποία παρόλο που έχει 12 διασταυρώσεις, ο αριθμός των απαιτούμενων αλλαγών είναι ίσος με δύο, δηλ αριθμός λύσεως 2.



Σχήμα 2.19



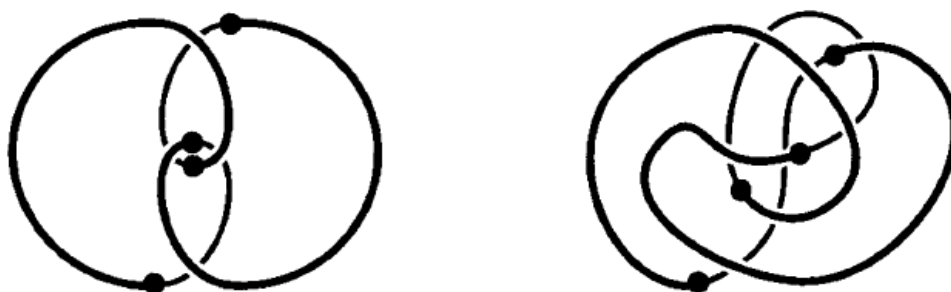
Σχήμα 2.20

### 2.5.2 Αριθμός γεφυρών

Στο Σχήμα 2.21 φαίνονται δύο προβολές των κόμβων trefoil και figure eight. Αυτοί, αντί να βρίσκονται επάνω στο επίπεδο προβολής, ουσιαστικά



το κόβουν στα σημεία διασταυρώσεων. Τα τονισμένα τμήματα των κόμβων βρίσκονται επάνω από το επίπεδο προβολής, ενώ τα αχνά κάτω από αυτό. Κάθε κόμβος τέμνει το επίπεδο σε τέσσερα σημεία. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν δύο μη πεπλεγμένες ακμές οι οποίες βρίσκονται επάνω από το επίπεδο προβολής των κόμβων. Αυτός είναι και ο ελάχιστος αριθμός τέτοιων μη πεπλεγμένων ακμών σε οποιαδήποτε προβολή των εν λόγω κόμβων. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι αυτοί οι κόμβοι έχουν αριθμό γεφυρών 2.



Σχήμα 2.21

Γενικά, σε μια προβολή του κόμβου σε ένα επίπεδο, ορίζουμε ως υπερυψωμένη διάβαση (overpass) να είναι ένα τόξο του κόμβου το οποίο κινείται επάνω από τουλάχιστον μια διασταύρωση αλλά ποτέ δεν πηγαίνει κάτω από αυτήν. Ο μέγιστος αριθμός υπερυψωμένης διάβασης είναι μια διάβαση η οποία δε θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερη. Και τα δύο άκρα του βρίσκονται ακριβώς πριν η ακμή πάει κάτω από μια διασταύρωση. Ο αριθμός γεφυρών της προβολής είναι ο αριθμός των μέγιστων υπερυψωμένων διαβάσεων στην προβολή.

**Ορισμός 2.5.2.1:** Ο αριθμός γεφυρών ενός κόμβου  $K$  είναι ο ελάχιστος αριθμός γεφυρών όλων των προβολών του κόμβου  $K$  και συμβολίζεται με  $b(K)$ .

### 2.5.3 Αριθμός Διασταυρώσεων

**Ορισμός 2.5.3.1:** Αριθμός Διασταυρώσεων (Crossing Number) ενός κόμβου  $K$  ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων σε οποιαδήποτε προβολή του κόμβου και συμβολίζεται με  $c(K)$ .





Για να υπολογίσουμε τον αριθμό διασταυρώσεων ενός κόμβου  $K$ , βρίσκουμε μια προβολή του κόμβου με έναν ορισμένο αριθμό διασταυρώσεων  $n$ . Έτσι ξέρουμε ότι ο αριθμός διασταυρώσεων του εν λόγω κόμβου είναι  $n$  ή μικρότερος. Εάν όλοι οι κόμβοι που έχουν λιγότερες διασταυρώσεις από  $n$  είναι γνωστοί και αν ο  $K$  δεν ανήκει σε αυτό το σύνολο, τότε ο  $K$  πρέπει να έχει αριθμό διασταυρώσεων  $n$ . Για παράδειγμα, ο κόμβος  $7_3$  που φαίνεται στο Σχήμα 2.22 έχει αριθμό διασταυρώσεων 7 αφού έχει μια προβολή με 7 διασταυρώσεις και είναι διαφορετικός από όλους τους κόμβους με λιγότερες διασταυρώσεις ( $3_1$ ,  $4_1$ ,  $5_1$ ,  $5_2$ ,  $6_1$ ,  $6_2$ ,  $6_3$ ). Παρόλα αυτά, κατά κανόνα είναι δύσκολο να προσδιοριστεί ο αριθμός διασταυρώσεων ενός κόμβου.

Αν έχουμε για παράδειγμα μια προβολή με 15 διασταυρώσεις, δεν μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι δεν πρόκειται για μια προβολή 14 διασταυρώσεων αλλαγμένη τοπολογικά, από τη στιγμή που δε γνωρίζουμε όλους τους κόμβους με 14 διασταυρώσεις.



Σχήμα 2.22

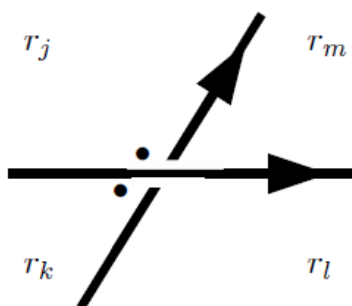


### 3. Το πολυώνυμο Alexander: η συνδυαστική μέθοδος

Η σημαντικότερη ίσως προσφορά του Alexander στη θεωρία κόμβων ήταν ένα πολυώνυμο - αναλλοίωτη που μπορεί να υπολογιστεί από το διάγραμμα του κόμβου. Από κάθε σημείο διασταύρωσης προκύπτει μια εξίσωση με μεταβλητές  $t_i$ . Αυτές οι εξισώσεις μπορούν στη συνέχεια να αναπαρασταθούν σε έναν πίνακα, από τον οποίο μπορούμε να εξάγουμε ένα πολυώνυμο επεξεργαζόμενοι τον πίνακα και παίρνοντας την ορίζουσά του. Το πολυώνυμο που προκύπτει με δυνάμεις του  $t$  πρέπει στη συνέχεια να κανονικοποιηθεί. Το κανονικοποιημένο πλέον πολυώνυμο αποτελεί μια αναλλοίωτη κόμβων.

#### 3.1 Υπολογισμός του πολυωνύμου Alexander

Η διαδικασία ξεκινάει με ένα προσανατολισμένο διάγραμμα  $D$  ενός κόμβου  $K$ . Έστω υπάρχουν  $v$  σημεία διασταυρώσεων στο διάγραμμα:  $c_1, c_2, \dots, c_v$ . Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, οι ακμές του διαγράμματος χωρίζουν το επίπεδο σε  $v+2$  περιοχές (συμπεριλαμβανομένης και της περιοχής εκτός του κόμβου). Αυτές τις περιοχές τις συμβολίζουμε με  $r_0, r_1, \dots, r_{v+1}$ .



Σχήμα 3.1

Στο Σχήμα 3.1 συμβολίζουμε τα από κάτω τόξα ενός διαγράμματος με δύο κουκίδες αριστερά του από κάτω τόξου, για ένα τυχαίο σημείο διασταύρωσης  $c_i$  και ονομάζουμε τις τέσσερις περιοχές που το περικλείουν



$r_j, r_k, r_i, r_m$ . Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τη γραμμική εξίσωση:

$$c_i(r) = tr_j - tr_k + r_i - r_m = 0$$

παίρνοντας το εναλλασσόμενο άθροισμα των συμβόλων που αναπαριστούν τις τέσσερις περιοχές στην κυκλική τους σειρά και πολλαπλασιάζοντας τις περιοχές με τις κουκίδες με το  $t$ .

Ο ορισμός μιας τέτοιας εξίσωσης για κάθε διασταύρωση στο διάγραμμα έχει ως αποτέλεσμα ένα σύστημα  $v$  εξισώσεων με  $v+2$  μεταβλητές, το οποίο μπορούμε να αναπαραστήσουμε σε έναν  $v \times (v+2)$  πίνακα,  $M$ , όπου κάθε στοιχείο του είναι  $\pm t, \pm 1$  ή  $0$ . Στον πίνακα που μόλις περιγράψαμε, κάθε γραμμή του αντιστοιχεί σε ένα σημείο διασταύρωσης με του διαγράμματος και κάθε στήλη αντιστοιχεί σε μια περιοχή. Το επόμενο βήμα της διαδικασίας είναι να επιλέξουμε δύο γειτονικές περιοχές  $r_p, r_q$  και να διαγράψουμε τις αντίστοιχες στήλες  $v_p, v_q$  από τον πίνακα. Οποιοσδήποτε δύο γειτονικές περιοχές μπορούν να επιλεγθούν και αποδεικνύεται ότι οι επιλεγέντες περιοχές δε θα επηρεάσουν την αναλλοίωτη που προκύπτει.

Σβήνοντας τις στήλες  $v_p, v_q$ , προκύπτει ένας τετραγωνικός πίνακας  $v \times v$ ,  $M_{p,q}$ . Ο πίνακας  $M_{p,q}$  ονομάζεται πίνακας Alexander του κόμβου  $K$ . Έστω  $\Delta_{p,q}(t)$  η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα, η οποία θα είναι ένα πολυώνυμο με δυνάμεις του  $t$  και ακεραίους συντελεστές.

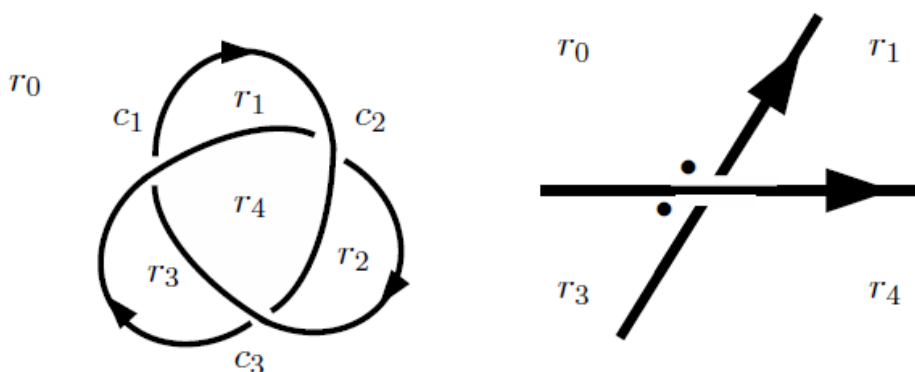
**Θεώρημα 3.1.1:** Το πολυώνυμο  $\Delta_{p,q}(t)$  που προκύπτει από την προαναφερθείσα διαδικασία διαφέρει από οποιοδήποτε άλλο ισοδύναμο διάγραμμα του ίδιου κόμβου  $K$  κατά έναν συντελεστή  $\pm t^k$  με  $k$  ακέραιο αριθμό.

Το γεγονός ότι το πολυώνυμο που προκύπτει μπορεί να διαφέρει κατά έναν συντελεστή  $\pm t^k$  όταν υπολογίζεται από διαφορετικά διαγράμματα του κόμβου κάνει εμφανές ότι απαιτείται μια κανονική μορφή, έτσι ώστε



σε κάθε κόμβο να αντιστοιχεί ένα και μοναδικό πολυώνυμο. Μια προσέγγιση είναι να ορίσουμε το  $\Delta_k(t) = \pm t^n \Delta_{p,q}(t)$ , έτσι ώστε ο όρος με τη χαμηλότερη δύναμη στο  $\Delta_k(t)$  είναι ένας θετικός ακέραιος. Αυτή είναι η απαιτούμενη κανονικοποιημένη μορφή που μας δίνει την αναλλοίωτη κόμβου και είναι γνωστή ως πολυώνυμο Alexander.

### 3.2 Το πολυώνυμο Alexander του $3_1$ .



Σχήμα 3.2

Έστω το διάγραμμα του trefoil που φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Εξετάζοντας τη διασταύρωση  $c_1$  βλέπουμε ότι οι περιοχές  $r_1$  και  $r_0$  φέρουν κουκίδες και η αντίστροφη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού κυκλική σειρά είναι  $r_0, r_3, r_4, r_1$ .

Από αυτήν, προκύπτει η εξίσωση:

$$c_1(r) = tr_0 - tr_3 + r_4 - r_1 = 0$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τα σημεία διασταύρωσης  $c_2$  και  $c_3$  προκύπτουν οι υπόλοιπες εξισώσεις:

$$c_2(r) = tr_0 - tr_1 + r_4 - r_2 = 0$$

$$c_3(r) = tr_0 - tr_2 + r_4 - r_3 = 0$$

Συνολικά, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν από τον πίνακα:



$$M = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & -t & 1 \\ t & -t & -1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -t & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Δύο γειτονικές περιοχές είναι οι  $r_3$  και  $r_4$ , συνεπώς σβήνουμε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα και παίρνουμε την ορίζουσά του  $M_{3,4}$ :

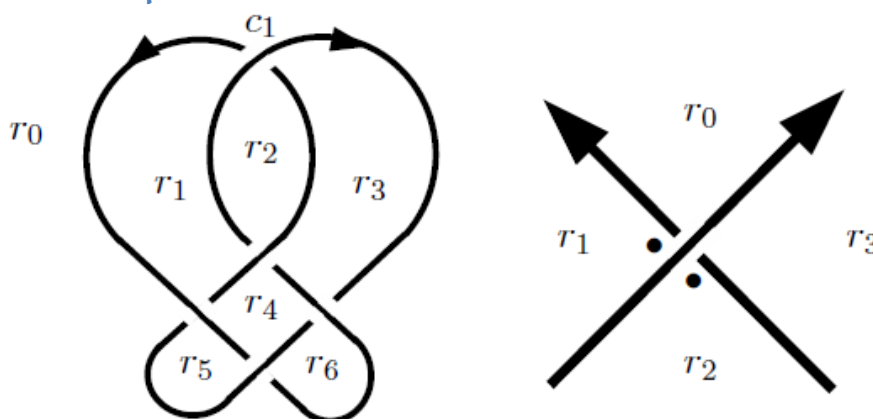
$$\begin{aligned} \Delta_{3,4}(t) = \det(M_{3,4}) &= \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ t & -t & -1 \\ t & 0 & -t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 0 & -t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & -1 \\ t & -t \end{vmatrix} = \\ & t^3 - t^2 + t = t(1 - t + t^2) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια απαλείφουμε το  $t$  και αυτό που μένει είναι το κανονικοποιημένο πολυώνυμο:

$$\Delta_K(t) = 1 - t + t^2$$

Αυτό είναι το πολυώνυμο Alexander για τον κόμβο trefoil και σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 ο υπολογισμός του από οποιοδήποτε άλλο διάγραμμα του trefoil θα μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.

### 3.3 Το πολυώνυμο Alexander του $5_2$ .



Σχήμα 3.3

Έστω το διάγραμμα του κόμβου  $5_2$  που φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ίδια με αυτήν που αναφέρθηκε στον trefoil, με τη μόνη διαφορά ότι είναι πιο περίπλοκη λόγω του μεγαλύτερου



αριθμού των σημείων διασταύρωσης, το οποίο οδηγεί σε πίνακα μεγαλύτερης διάστασης. Αρχικά, εξετάζεται το σημείο διασταύρωσης  $c_1$  στο διάγραμμα του κόμβου. Οι περιοχές  $r_1$  και  $r_2$  φέρουν κουκίδες και η κυκλική σειρά των περιοχών που περιβάλλουν το σημείο διασταύρωσης είναι  $r_1, r_2, r_3$ , και  $r_0$ .

Συνεπώς η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$c_1(r) = tr_1 - tr_2 + r_3 - r_0 = 0$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στα σημεία διασταύρωσης  $c_2, \dots, c_5$  προκύπτει ο εξής πίνακας:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 1 & -t & 0 & 0 \\ -t & t & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & t \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -t & 1 & t \end{pmatrix}$$

Σε αυτό το διάγραμμα επιλέγουμε τις γειτονικές περιοχές  $r_4$  και  $r_5$  και σβήνουμε τις στήλες, παίρνοντας τον τετραγωνικό πίνακα  $M_{4,5}$ . Τότε:

$$\Delta_{4,5}(t) = \det(M_{4,5}) = \begin{vmatrix} -1 & t & -t & 1 & 0 \\ 0 & t & -1 & 1 & 0 \\ -t & t & 0 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 & 1 & t \\ -1 & 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 1 & 0 \\ -t & t & 0 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 & 1 & t \\ -1 & 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} t & -1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} + (1-t) \begin{vmatrix} 0 & t & 1 & 0 \\ -t & t & 0 & 0 \\ -t & 0 & 1 & t \\ -1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$$

$$= - \left\{ t \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} \right\} +$$

$$+(1-t) \left\{ (-t) \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 \\ -t & 1 & t \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -t & t & 0 \\ -t & 0 & t \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} \right\}$$



$$= -t^2 + (1 - t)(-t^2 + 2t^3) = -2t^2 + 3t^3 - 2t^4$$

Κανονικοποιώντας το πολυώνυμο διαιρώντας με το  $-t^2$  παίρνουμε το πολυώνυμο Alexander:

$$\Delta_K(t) = 2 - 3t + 2t^2$$



## 4. Το πολυώνυμο Alexander: η γεωμετρική μέθοδος

Η μελέτη του πολυωνύμου Alexander και ο καθορισμός του ρόλου του στη θεωρία κόμβων έχει γίνει διεξοδικά. Έχει βρεθεί ότι το πολυώνυμο Alexander είναι στενά συνδεδεμένο με τοπολογικές ιδιότητες ενός κόμβου και έπαιξε σημαντικό ρόλο στη θεωρία των κόμβων. Επιπλέον μεγάλης σημασία έχει το γεγονός ότι υπάρχουν αρκετοί τρόποι υπολογισμού του. Μια από τις μεθόδους αυτές εισάγει την έννοια των πινάκων Seifert. Οι πίνακες Seifert αποτελούν ακρογωνιαίους λίθους στη θεωρία κόμβων. Ο τρόπος υπολογισμού τους, καθώς και η χρήση τους για τον υπολογισμό του πολυωνύμου Alexander θα αναλυθούν στη συνέχεια.

### 4.1 Η επιφάνεια Seifert

**Θεώρημα 4.1.1 (L. Pontrjagin – F. Frankl):** Έστω ένας τυχαίος προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος)  $K$ . Θα υπάρχει στο  $\mathbb{R}^3$  μια προσανατολίσιμη συνδεδεμένη επιφάνεια  $F$ , τέτοια ώστε να έχει ως σύνορο τον  $K$ .

#### Απόδειξη:

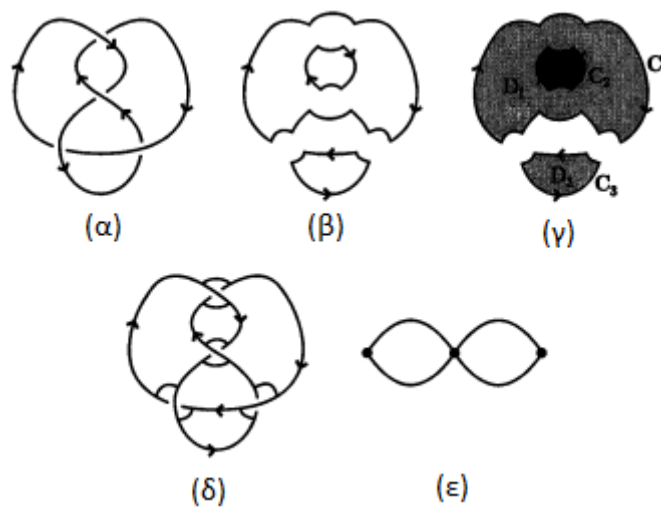
Έστω ότι  $K$  ένας προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος) και  $D$  ένα κανονικό διάγραμμα του  $K$ . Ο στόχος είναι να σπάσουμε το  $D$  σε πολλές απλές κλειστές καμπύλες. Το πρώτο βήμα είναι να σχεδιαστεί ένας μικρός κύκλος με ένα από τα σημεία διασταύρωσης του  $D$  στο κέντρο του. Ο κύκλος αυτός τέμνει το διάγραμμα  $D$  σε τέσσερα σημεία, έστω  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$  (Σχήμα 4.1(α)). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1(β), κόβουμε το σημείο διασταύρωσης και ενώνουμε τα  $a-d$  και  $b-c$ .





Σχήμα 4.1

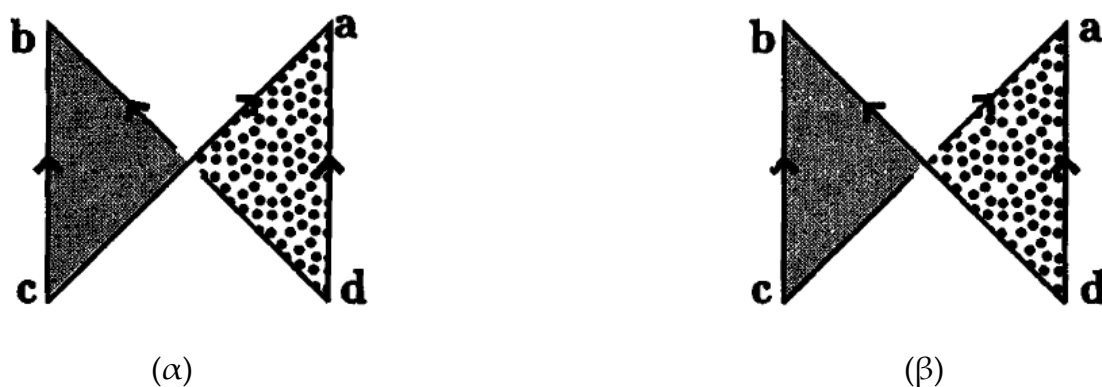
Αυτό που πρακτικά έγινε ήταν να αλλάξουν τα αρχικά τμήματα  $ac$  και  $bd$ , σε νέα,  $ad$  και  $bc$ . Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αφαιρέσουμε το σημείο διασταύρωσης του διαγράμματος  $D$  που βρίσκεται μέσα στον κύκλο. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται *splicing* του κόμβου  $K$  (κατά τη φορά του προσανατολισμού του) σε ένα σημείο διασταύρωσης του  $D$ . Αν εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία σε όλα τα σημεία διασταύρωσης του  $D$ , το αποτέλεσμα είναι ότι το  $D$  θα έχει αποσυντεθεί σε πολλές απλές κλειστές καμπύλες, Σχήμα 4.2(β). Αυτές οι καμπύλες, ονομάζονται καμπύλες Seifert. Το διάγραμμα  $D$  έχει μετασχηματιστεί σε ένα κανονικό διάγραμμα ενός κρίκου στο επίπεδο το οποίο δεν έχει σημεία διασταύρωσης (δηλ τετρωμένος κρίκος). Κάθε μια από αυτές τις απλές κλειστές καμπύλες μπορεί να διευθυνθεί σε έναν δίσκο.



Σχήμα 4.2



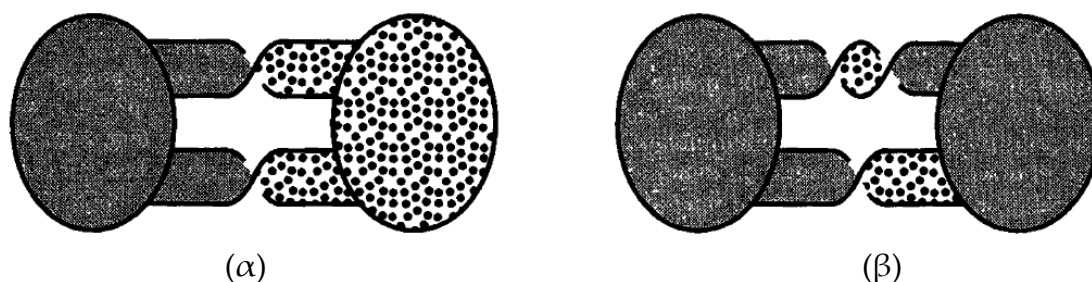
Στην περίπτωση του Σχήματος 4.2(β), προκύπτουν τρεις δίσκοι  $D_1$ ,  $D_2$  και  $D_3$ , Σχήμα 4.2(γ). Το όριο του κάθε  $D_i$  είναι η καμπύλη Seifert  $C_i$ . Για να σχηματίσουμε μία ενιαία επιφάνεια από τους δίσκους, πρέπει να τους συνδέσουμε με λωρίδες, οι οποίες έχουν μία μόνο συστροφή. Για να το πετύχουμε αυτό παίρνουμε ένα τετράγωνο  $abcd$  και του δίνουμε μια θετική ή αρνητική συστροφή, Σχήματα 4.3(α) και 4.3(β) αντίστοιχα. Αυτά τα συνεστραμμένα τετράγωνα είναι οι απαιτούμενες λωρίδες.



Σχήμα 4.3

Αν συνδέσουμε θετικές (αρνητικές) λωρίδες στα σημεία του  $D$  που αντιστοιχούν σε θετικά (αρνητικά) σημεία διασταύρωσης προτού αυτά αφαιρεθούν, τότε θα προκύψει μια συμπαγής συνδεδεμένη, προσανατολίσιμη επιφάνεια  $F$ , Σχήμα 4.2(δ). (Στην περίπτωση που έχουμε έναν κρίκο  $K$ , αν αλλάξουμε τον κρίκο  $K$  με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε η προβολή του  $K$  να είναι συνδεδεμένη, τότε μπορούμε με την προαναφερθείσα διαδικασία να πάρουμε μια συμπαγή συνδεδεμένη επιφάνεια.) Το όριο της επιφάνειας αυτής  $F$ , είναι ο αρχικός κόμβος  $K$ . Όπως έχει ήδη επισημανθεί, η  $F$  είναι επίσης συμπαγής προσανατολίσιμη επιφάνεια.

Στο Σχήμα 4.4(α) φαίνεται ότι σκιάζοντας το εμπρός τμήμα της επιφάνειας και στίζοντας το πίσω μέρος της, μπορούμε να διαχωρίσουμε τα δύο αυτά τμήματα. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε έναν προσανατολισμό στην επιφάνεια. Αν μια λωρίδα έχει δύο συστροφές όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4(β), τότε δεν είναι δυνατό να διαχωρίσουμε το μπρος και το πίσω μέρος της επιφάνειας.



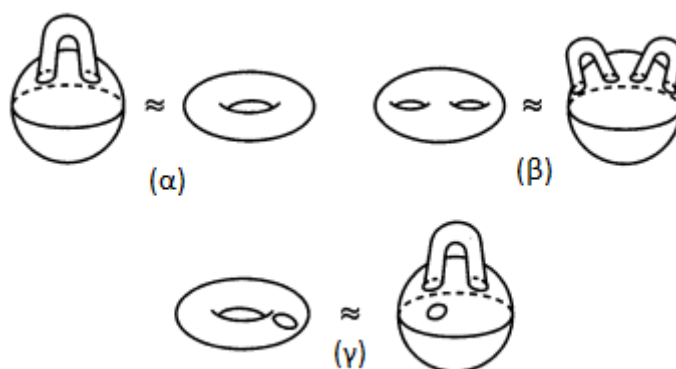
Σχήμα 4.4

Γενικά, μια προσανατολίσιμη, συμπαγής συνδεδεμένη επιφάνεια η οποία έχει ως όριό της έναν προσανατολισμένο κόμβο (ή κρίκο) ονομάζεται επιφάνεια Seifert του  $K$ . Ο προσανατολισμός της  $F$  επηρεάζεται από τον προσανατολισμό του κόμβου  $K$  ο οποίος αποτελεί το όριό της. Η επιφάνεια Seifert που κατασκευάστηκε στην προαναφερθείσα απόδειξη εξαρτιόταν από κανονικό διάγραμμα  $D$ , του  $K$ . Συνεπώς είναι πιο σωστό να διατυπωθεί ότι η επιφάνεια Seifert σχηματίζεται από το  $D$ , ένα κανονικό διάγραμμα του  $K$ .

Έστω ότι έχουμε μια επιφάνεια Seifert  $F$  ενός κόμβου  $K$  που προέκυψε από τους δίσκους και τις λωρίδες που αναλύθηκαν προηγουμένως. Αν συρρικνώσουμε κάθε δίσκο έως να γίνει είναι ένα σημείο και ταυτόχρονα μειώσουμε το μήκος κάθε λωρίδας στο ελάχιστο, τότε θα προκύψει ένας γράφος στο χώρο. Τέτοιο γράφοι στην πραγματικότητα βρίσκονται στο επίπεδο. Στο Σχήμα 4.2(ε) φαίνεται ο γράφος Seifert του κόμβου Figure 8, όπου οι κορυφές και ακμές αντιστοιχούν στους δίσκους και τις λωρίδες αντίστοιχα.

## 4.2 Το γένος ενός κόμβου

Μια κλειστή (δηλ συμπαγής χωρίς όρια) προσανατολίσιμη επιφάνεια  $F$  είναι τοπολογικά ισοδύναμη (ομοιομορφική) με μια σφαίρα που έχει πολλά χερούλια προσαρμοσμένα στην επιφάνειά της. Ο αριθμός αυτών των χερουλιών ονομάζεται γένος της επιφάνειας  $F$  και συμβολίζεται με  $g(F)$ . Η επιφάνεια με γένος 1 που φαίνεται στο Σχήμα 4.5(α) ονομάζεται τόρος, ενώ η επιφάνεια του Σχήματος 4.5(β) έχει γένος 2.



Σχήμα 4.5

Αφού η επιφάνεια  $F$  έχει ένα όριο  $F$ , τότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι ομοιομορφική με μια σφαίρα που έχει πολλά χερούλια και επίσης έχει μια τρύπα στη σφαίρα (με χερούλια) για κάθε συνιστώσα του κρίκου, Σχήμα 4.5(γ). Ωστόσο, δεν είναι πάντα εύκολο να φανταστεί κανείς την επιφάνεια Seifert ενός κόμβου. Για παράδειγμα η επιφάνεια Seifert του κόμβου Figure 8 που φαίνεται στο Σχήμα 4.2(δ) είναι τοπολογικά ίδια με την επιφάνεια του Σχήματος 4.5(γ).

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμό παραγωγής επιφανειών Seifert, προκύπτουν προσανατολισμένες επιφάνειες με αποτέλεσμα να μπορούμε να επιλέξουμε το μικρότερο γένος από όλες τις επιφάνειες Seifert που προκύπτουν από έναν κόμβο. Αυτό το ελάχιστο γένος ονομάζεται γένος του κόμβου  $K$  και συμβολίζεται με  $g(K)$ , το οποίο είναι αναλλοίωτη κόμβων. Ο υπολογισμός του γένους ενός τυχαίου κόμβου είναι δύσκολη διαδικασία. Παρόλα αυτά, ο καθορισμός του γένους μιας κατασκευασμένης προσανατολίσιμης επιφάνειας είναι σχετικά εύκολος. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τη χαρακτηριστική Euler.

#### Θεώρημα 4.2.1

Μπορούμε να χωρίσουμε (τριγωνοποιήσουμε) οποιαδήποτε προσανατολίσιμη επιφάνεια χρησιμοποιώντας  $a_0$  κορυφές (της τριγωνοποίησης),  $a_1$  ακμές και  $a_2$  περιοχές (πλήθος τριγώνων). Αν

$$\chi(F) = a_0 - a_1 + a_2$$



τότε  $\chi(F)$  είναι ένας ακέραιος που δεν εξαρτάται από τον τρόπο που χωρίστηκε η επιφάνεια  $F$ . Ο ακέραιος αυτός ονομάζεται χαρακτηριστική Euler.

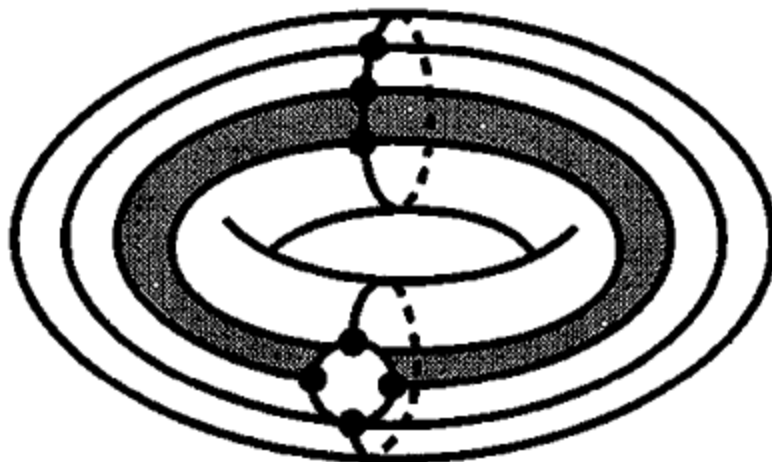
Η χαρακτηριστική Euler  $\chi(F)$  συνδέεται με το γένος της  $F$   $g(F)$  ως εξής:

$$\chi(F) = 2 - 2g(F) \Leftrightarrow g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}$$

Αφού η  $F$  έχει όριο και με δεδομένο ότι το όριο αυτό αποτελείται από κορυφές και ακμές, η ανωτέρω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\chi(F) = 2 - \mu(F) - 2g(F)$$

όπου  $\mu(F)$  ο αριθμός των κλειστών καμπυλών που σχηματίζουν το όριο της  $F$ . Για παράδειγμα μπορούμε να χωρίσουμε τον τόρο με μια σπή με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 4.6, έτσι ώστε  $\alpha_0=7$ ,  $\alpha_1=14$  και  $\alpha_2=6$ . Συνεπώς  $\chi(F) = -1$  και έτσι προκύπτει ότι  $g(F) = 1$ .



Σχήμα 4.6

Για να εφαρμόσουμε τη χαρακτηριστική Euler σε μια τυχαία επιφάνεια Seifert  $F$ , θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε τους δίσκους και τις λωρίδες της  $F$  ως τμήμα της. Τα σημεία της  $F$  στο τμήμα αυτό είναι οι τέσσερις κορυφές κάθε λωρίδας. Οι ακμές της  $F$  είναι οι πολυγωνικές καμπύλες οι οποίες αποτελούν τις ακμές των λωρίδων και τα όρια των δίσκων μεταξύ των σημείων των κορυφών. Οι περιοχές της  $F$  είναι οι δίσκοι και οι λωρίδες.



Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αν  $d$  είναι ο αριθμός των δίσκων και  $b$  ο αριθμός των λωρίδων, τότε  $\alpha_0=4b$ ,  $\alpha_1=6b$  και  $\alpha_2=b+d$ . Επομένως  $\chi(F)=4b-6b+b+d=d-b$ . Επίσης,  $\mu(K)$  είναι ο αριθμός των συνιστωσών του κρίκου  $K$ . Έτσι:

$$2g(f) = 2 - \mu(K) - \chi(F) = 2 - \mu(K) - d + b \Leftrightarrow$$

$$2g(f) + \mu(K) - 1 = 1 - d + b$$

Αν ο  $K$  είναι κόμβος και όχι κρίκος, τότε  $\mu(K) = 1$  και έτσι:

$$2g(f) = 1 - d + b$$

Έστω  $\Gamma(D)$  είναι ο γράφος Seifert που κατασκευάζεται από την επιφάνεια Seifert του Σχήματος 4.2(ε). Αφού ο  $\Gamma(D)$  βρίσκεται στο επίπεδο, θα χωρίζει την  $S^2$  σε πολλές περιοχές. Σε αυτήν τη διαίρεση της  $S^2$ , ο αριθμός των σημείων είναι  $d$ , και ο αριθμός των ακμών είναι ίσος με  $b$ . Έστω ότι έχουμε αριθμό περιοχών ίσο με  $f$ . Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.1 θα έχουμε:

$$2 = \chi(S^2) = d - b + f \Leftrightarrow f - 1 = 1 - d + b$$

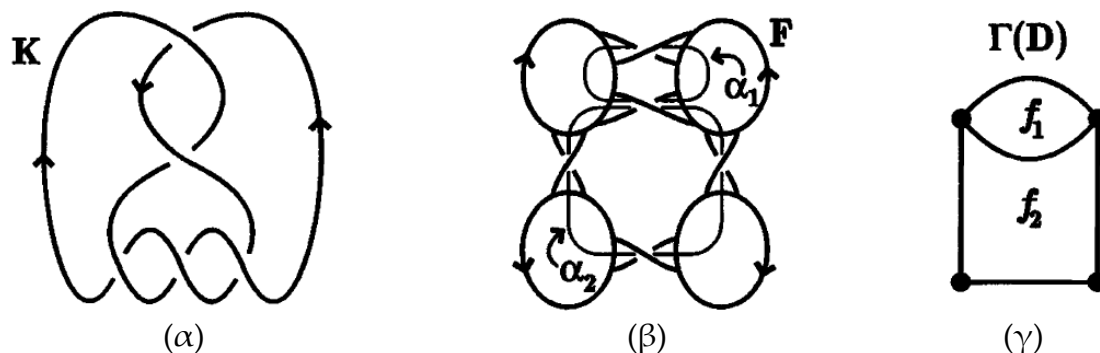
Δηλ  $1-d+b$  είναι ίσο με τον αριθμό των περιοχών της διαίρεσης της  $S^2$  πλην της περιοχής που περιέχει ένα σημείο στο άπειρο.

### 4.3 Ο πίνακας Seifert

Έστω  $F$  μια επιφάνεια Seifert που δημιουργήθηκε από το κανονικό διάγραμμα ενός κόμβου (ή κρίκου)  $K$  και  $\Gamma(D)$  ο γράφος της. Όταν ο  $\Gamma(D)$  διαιρεί την  $S^2$ , έχει δειχτεί ότι

$$2g(f) + \mu(K) - 1 = 1 - d + b = f - 1$$

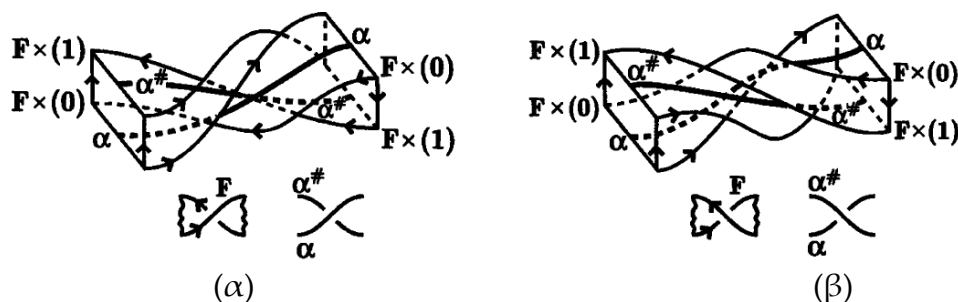
Το όριο κάθε μιας από τις περιοχές  $f$  είναι μια κλειστή καμπύλη του  $\Gamma(D)$ . Συνεπώς μπορούμε από αυτές τις κλειστές καμπύλες να δημιουργήσουμε κλειστές καμπύλες στην επιφάνεια Seifert.



Σχήμα 4.7

Οι δύο κλειστές καμπύλες  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  του Σχήματος 4.7(β) στην  $F$ , που προκύπτουν από το γράφο  $\Gamma(D)$ , αντιστοιχούν στα όρια των δύο περιοχών πλην αυτής που περιέχει το άπειρο,  $f_1$  και  $f_2$  στην  $S^2$  (Σχήμα 4.7(γ)). Ως σύνολο, αυτές οι κλειστές καμπύλες θα δώσουν μια αναλλοίωτη κόμβων. Ο κόμβος  $K$  τους Σχήματος 4.7(α) έχει επιφάνεια Seifert γένους 1, από την οποία προκύπτουν δύο κλειστές καμπύλες  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ . Αυτές οι δύο καμπύλες είναι δυνατό να έχουν σημεία τομής. Συνεπώς, οι  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  δεν είναι κρίκοι. Παρόλα αυτά, αν υψώσουμε πχ την  $\alpha_2$  ελαφρά έτσι ώστε να σχηματιστεί μια νέα καμπύλη  $\alpha_2^\#$ , παράλληλη στην  $\alpha_2$ , τότε μπορούμε να αφαιρέσουμε τα σημεία τομής και να δημιουργήσουμε έναν κρίκο  $\{\alpha_1, \alpha_2^\#\}$ .

Για να γίνει κατανοητό το τελευταίο, παχαίνουμε την επιφάνεια  $F$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.8, δημιουργούμε δηλαδή την  $F \times [0,1]$ . Με αυτόν τον τρόπο η αρχική επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η  $F \times (0)$  και άρα οι αρχικές καμπύλες  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  βρίσκονται σε αυτήν, δηλ μπορούν να γραφούν ως  $\alpha_1 \times (0)$  και  $\alpha_2 \times (0)$ . Για λόγους απλότητας θα συνεχίσουμε να αναφερόμαστε στις  $\alpha_1 \times (0)$  και  $\alpha_2 \times (0)$  ως  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ . Ομοίως, αντί για  $\alpha_1 \times (1)$  και  $\alpha_2 \times (2)$  θα γράφουμε  $\alpha_1^\#$  και  $\alpha_2^\#$ .



Σχήμα 4.8



Στη συνέχεια ορίζουμε τον προσανατολισμό για τις καμπύλες  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ . Από την επιλογή αυτή προκύπτει αντίστοιχα και ο προσανατολισμός των  $\alpha_1^\#$  και  $\alpha_2^\#$ . Τώρα είναι δυνατόν να υπολογιστεί ο αριθμός συνέλιξης  $lk(\alpha_1, \alpha_2^\#)$ ,  $lk(\alpha_2, \alpha_1^\#)$ ,  $lk(\alpha_1, \alpha_1^\#)$ ,  $lk(\alpha_2, \alpha_2^\#)$ . Αυτοί οι αριθμοί συνέλιξης μπορούν να διαταχθούν σε έναν πίνακα  $2 \times 2$ :

$$M = \begin{bmatrix} lk(\alpha_1, \alpha_1^\#) & lk(\alpha_1, \alpha_2^\#) \\ lk(\alpha_2, \alpha_1^\#) & lk(\alpha_2, \alpha_2^\#) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται πίνακας Seifert του κόμβου  $K$  του Σχήματος 4.7(α). Από τη στιγμή που οι αριθμοί συνέλιξης είναι ακέραιοι, ο πίνακας  $M$  είναι πίνακας ακεραίων αριθμών. Λόγω του ότι οι πίνακας  $M$  εξαρτάται από τον προσανατολισμό των  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$ , δεν μπορεί να είναι αναλλοίωτη του κόμβου  $K$ .

Εάν το γένος της επιφάνειας Seifert  $F$  ενός κόμβου ή κρίκου είναι  $g(F)$ , τότε στην  $F$  υπάρχουν  $2g(F) + \mu(K) - 1 (= m)$  κλειστές καμπύλες  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . Επεκτείνοντας το προηγούμενο παράδειγμα, αν δώσουμε τυχαίους προσανατολισμούς στις καμπύλες αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε τους διάφορους αριθμούς συνέλιξης και στη συνέχεια να δημιουργήσουμε τον πίνακα Seifert διάστασης  $m \times m$ .

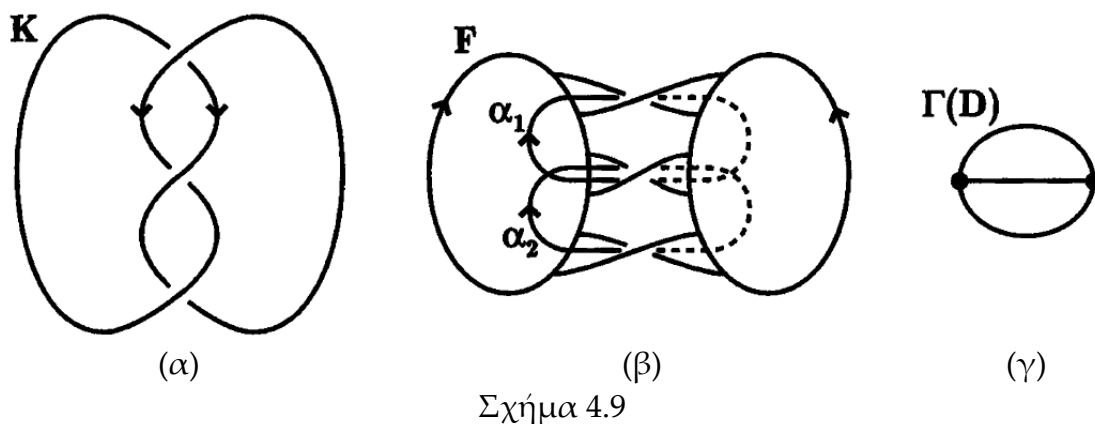
$$M = [lk(\alpha_i, \alpha_j^\#)]_{i,j=1,2,\dots,m}$$

Συνεπώς, από οποιοδήποτε διάγραμμα  $D$  ενός κόμβου  $K$  μπορούμε να λάβουμε έναν πίνακα Seifert. Ο πίνακας αυτός εξαρτάται από τον προσανατολισμό των  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . Κατά κανόνα οι αριθμοί  $lk(\alpha_i, \alpha_j^\#)$  και  $lk(\alpha_j, \alpha_i^\#)$  δεν είναι ίσοι, επομένως ο πίνακας  $M$  δεν είναι συμμετρικός. Τέλος, αν  $g(F) = 0$ , τότε ο πίνακας Seifert του κόμβου αυτού είναι ο κενός πίνακας.

Ας δούμε στη συνέχεια διάφορα παραδείγματα για να διασαφηνιστεί ο τρόπος υπολογισμού του πίνακα Seifert εντός κόμβου.

**Παράδειγμα 4.3.1:** Από το διάγραμμα του κόμβου trefoil του Σχήματος 4.9(α) μπορούμε να πάρουμε την αντίστοιχη επιφάνεια Seifert του Σχήματος 4.9(β) και το γράφο Seifert του Σχήματος 4.9(γ).





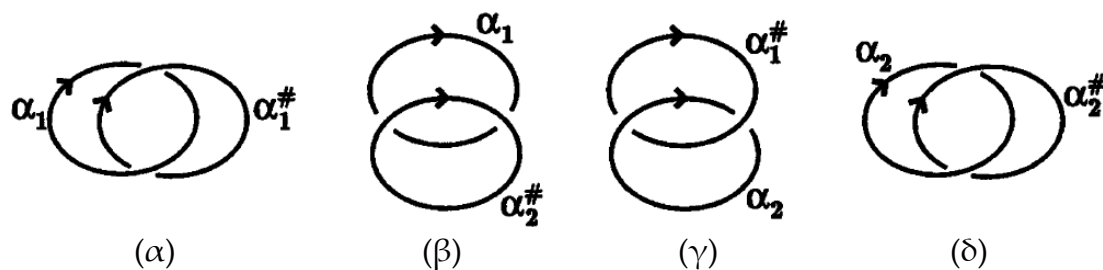
Σχήμα 4.9

Από το Σχήμα 4.9(β) προκύπτει ότι υπάρχουν δύο κλειστές καμπύλες,  $\alpha_1, \alpha_2$  στην επιφάνεια Seifert και η σχέση μεταξύ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^\#$  και  $\alpha_2^\#$  φαίνεται στο Σχήμα 4.10 (α) έως (δ). Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι

$$lk(\alpha_1, \alpha_1^\#) = -1, lk(\alpha_2, \alpha_1^\#) = 1, lk(\alpha_2, \alpha_2^\#) = -1 \text{ και } lk(\alpha_1, \alpha_2^\#) = 0$$

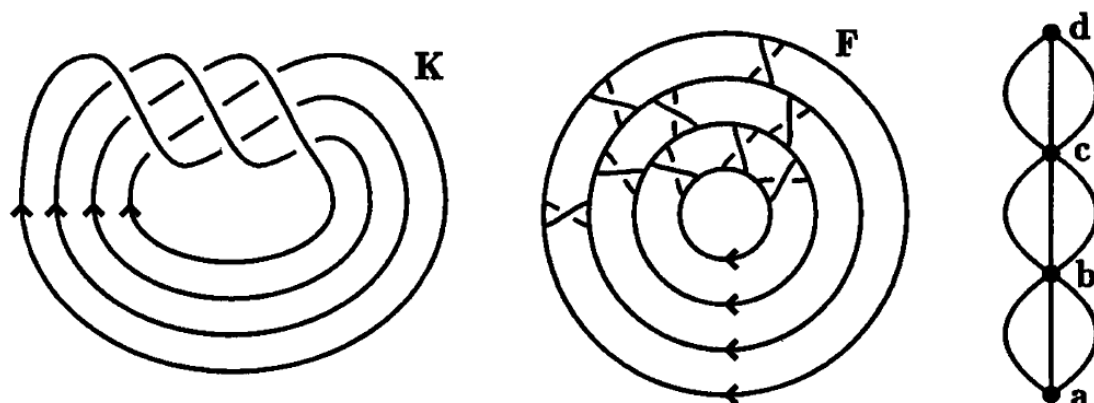
Συνεπώς ο πίνακας Seifert του κόμβου είναι ο εξής:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



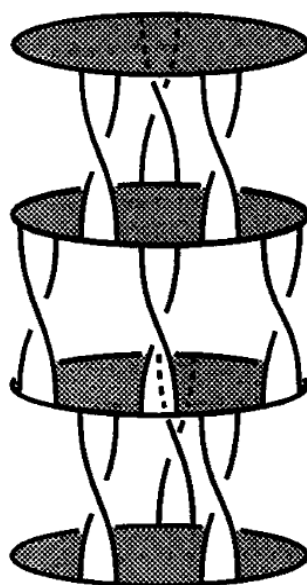
Σχήμα 4.10

**Παράδειγμα 4.3.2:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον κόμβο  $K$  του Σχήματος 4.11. Μία από τις επιφάνειες Seifert που προκύπτουν από τον κόμβο αυτό είναι και αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.11

Αφού η επιφάνεια Seifert του κόμβου  $K$  έχει γένος 3, τότε ο πίνακας Seifert θα είναι διάστασης  $6 \times 6$  και στην επιφάνειά του θα υπάρχουν έξι κλειστές καμπύλες. Για απλοποίηση των του προβλήματος θα το αντιμετωπίσουμε τμηματικά, ξεκινώντας από το ζευγάρι  $\alpha_1, \alpha_2$  στην  $F$ , που αντιστοιχεί στις κορυφές  $a$  και  $b$  του γράφου  $\Gamma(D)$ . Το ζευγάρι καμπυλών αυτό, δημιουργείται στην  $F$  από τις λωρίδες που ενώνουν τον επάνω δίσκο με τον αμέσως επόμενο και από τους δίσκους αυτούς κάθε αυτούς.



Σχήμα 4.12



Με τρόπο όμοιο όπως στο παράδειγμα 4.3.1 μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής

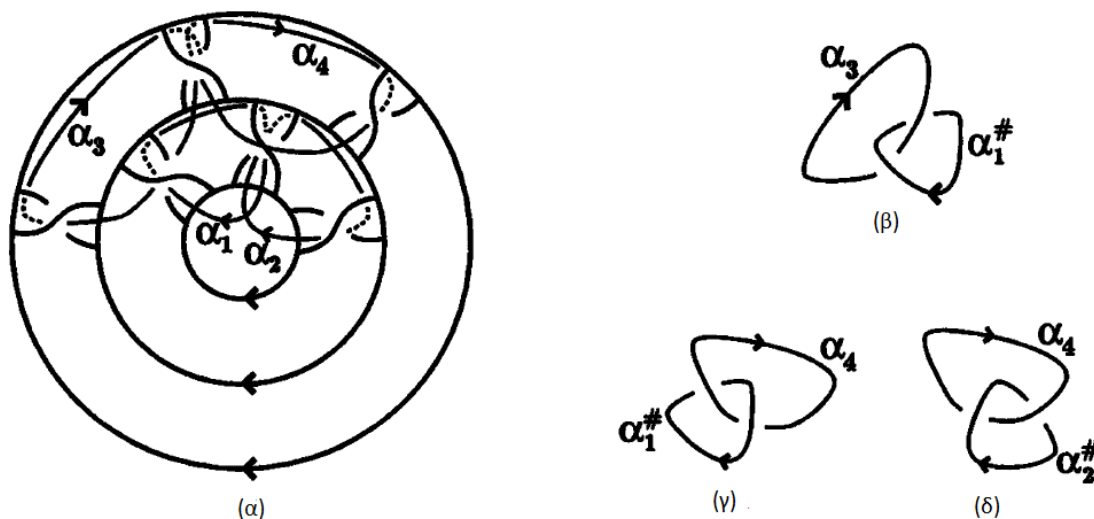
$$lk(\alpha_1, \alpha_1^\#) = -1, lk(\alpha_2, \alpha_1^\#) = 1, lk(\alpha_2, \alpha_2^\#) = -1$$

Το ζευγάρι  $\alpha_3, \alpha_4$  στην  $F$  αντιστοιχεί στις κλειστές καμπύλες του  $\Gamma(D)$  με κορυφές  $b$  και  $c$ . Αυτό το ζεύγος καμπυλών βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο δίσκο της  $F$  και στις λωρίδες που τους ενώνουν. Τότε:

$$lk(\alpha_3, \alpha_4^\#) = -1, lk(\alpha_4, \alpha_3^\#) = 1, lk(\alpha_4, \alpha_4^\#) = -1$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τους κοινούς αριθμούς συνέλιξης μεταξύ δύο ζευγών κλειστών καμπυλών  $\alpha_1, \alpha_2$  και  $\alpha_3, \alpha_4$ . Ορισμένα από τα διαγράμματα φαίνονται στο Σχήμα 4.13 (β) έως (δ). Έτσι:

$$lk(\alpha_3, \alpha_1^\#) = 1, lk(\alpha_4, \alpha_1^\#) = -1, lk(\alpha_4, \alpha_2^\#) = 1$$



Σχήμα 4.13

Συνεχίζοντας την ανωτέρω διαδικασία μπορούμε τελικά να υπολογίσουμε τον πίνακα Seifert του κόμβου  $K$  ο οποίος είναι ο εξής:



$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Seifert ενός κόμβου δεν είναι μοναδικός. Στην πραγματικότητα από τη στιγμή που δεν έχουμε ορίσει με σταθερό τρόπο τον προσανατολισμό ή τη σειρά των κλειστών καμπυλών  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , ακόμα και μια μικρή αλλαγή σε αυτά μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα ο πίνακας Seifert να αλλάξει. Γι αυτόν το λόγο, προκειμένου να εξαγάγουμε μια αναλλοίωτη ενός κόμβου από τον πίνακα Seifert, θα πρέπει να εξετάσουμε τη σχέση των διαφόρων πινάκων που προκύπτουν από αυτόν.

#### 4.4 S-ισοδυναμία πινάκων Seifert

Η κατασκευή του πίνακα Seifert, εξαρτάται από το κανονικό διάγραμμα του κόμβου που θα χρησιμοποιήσουμε. Αφού μπορούμε να μεταβούμε από ένα κανονικό διάγραμμα του κόμβου σε ένα άλλο, χρησιμοποιώντας μια σειρά από κινήσεις Reidemeister, είναι λογικό να εξετάσουμε την επίδραση των κινήσεων αυτών στον εκάστοτε πίνακα Seifert.

**Θεώρημα 4.4.1:** Δύο πίνακες Seifert που προκύπτουν από ισοδύναμους κόμβους (ή κρίκους) μπορούν να μετασχηματιστούν από τον έναν στον άλλον, χρησιμοποιώντας έναν πεπερασμένο αριθμό των εξής πράξεων και των αντίστροφων τους):

$$\Lambda_1: M_1 \rightarrow PM_1P^T,$$

όπου  $P$  είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας ακεραίων με  $\det P = \pm 1$

$$\Lambda_2: M_2 \rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} & & * & 0 \\ & M_1 & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & M_1 & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου  $*$  ένας τυχαίος ακέραιος.



Η πράξη  $A_1$  εναλλάσσει δύο γραμμές, πχ την  $i^{\text{η}}$  με την  $j^{\text{η}}$  και στη συνέχεια εναλλάσσει την  $i^{\text{η}}$  με την  $j^{\text{η}}$  στήλη. Μπορεί επίσης να προσθέσει  $k$  φορές  $i^{\text{η}}$  σειρά στην  $j^{\text{η}}$  σειρά και στη συνέχεια να προσθέσει  $k$  φορές την  $i^{\text{η}}$  στήλη στην  $j^{\text{η}}$  στήλη. Η πράξη αυτή ορίστηκε με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντιστοιχεί τη σειρά ή τον προσανατολισμό των κλειστών καμπυλών που αναφέραμε προηγουμένως.

Η πράξη  $A_2$  ορίστηκε με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε να αντιστοιχεί στην αλλαγή του γένους μιας επιφάνειας Seifert λόγω μιας κίνησης Reidemeister, δηλ μικραίνει ή μεγαλώνει τον πίνακα Seifert.

**Ορισμός 4.4.1:** Δύο τετραγωνικοί πίνακες  $M, M'$  που προκύπτουν ο ένας από τον άλλον εφαρμόζοντας πεπερασμένο αριθμό από πράξεις  $A_1, A_2$  και την αντίστροφη,  $A_2^{-1}$  ονομάζονται  $S$ -ισοδύναμοι.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, δύο πίνακες Seifert που προκύπτουν από δύο ισοδύναμους κόμβους (ή κρίκους) είναι  $S$ -ισοδύναμοι.

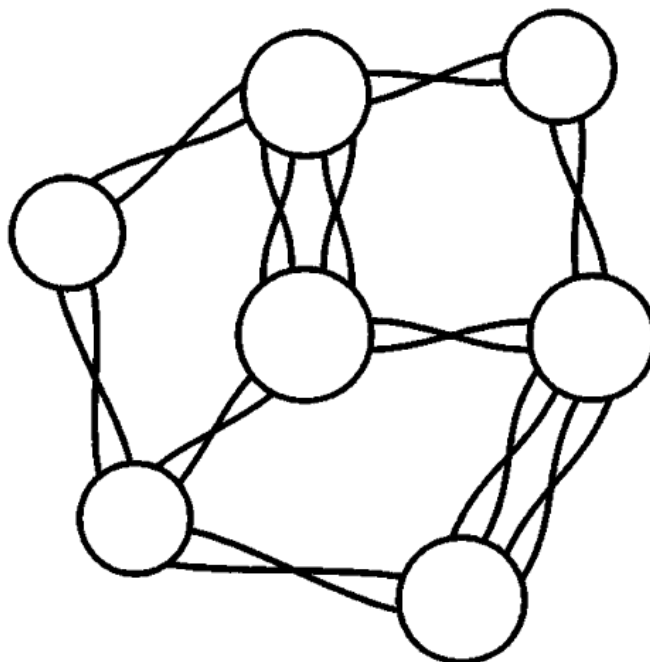
Για να αποδειχτεί το θεώρημα 4.4.1 θα πρέπει να δούμε πως μεταβάλλεται η επιφάνεια και ο πίνακας Seifert, αν εκτελέσουμε μια από τις κινήσεις Reidemeister. Αποδεικνύοντας τις προτάσεις 4.4.1 και 4.4.2, ουσιαστικά επιβεβαιώνεται το θεώρημα 4.4.1.

**Πρόταση 4.4.1:** Έστω  $D$  το κανονικό διάγραμμα και  $D'$  ένα άλλο διάγραμμα του ίδιου κόμβου  $D$ , το οποίο προκύπτει αν εφαρμόσουμε μία μόνο κίνηση Reidemeister σε αυτόν. Επίσης, έστω  $F$  μια επιφάνεια Seifert που προκύπτει από το  $D$ . Ομοίως, έστω  $F'$  η επιφάνεια Seifert που προκύπτει από τον  $D'$  η οποία διαφέρει σε σχέση με την  $F$  μόνο στο σημείο που έχει εφαρμοστεί η κίνηση Reidemeister. Τότε οι πίνακες Seifert  $M$  και  $M'$  που προκύπτουν από τις  $F$  και  $F'$  είναι  $S$ -ισοδύναμοι. (Ουσιαστικά, λόγω του τρόπου κατασκευής της  $F'$ , ο  $M'$  θα διαφέρει από τον  $M$  μόνο κατά λίγες σειρές και στήλες).

Η απόδειξη του θεωρήματος 4.4.1 θα είναι πλήρης αν εκτός της πρότασης 4.4.1 μπορούμε να αποδείξουμε ότι δύο διαφορετικές επιφάνειες Seifert που προκύπτουν από το ίδιο κανονικό διάγραμμα ενός κόμβου, έχουν  $S$ -



ισοδύναμους πίνακες Seifert. Αυτό αποδεικνύεται από την κάτωθι πρόταση.



Σχήμα 4.14

**Πρόταση 4.4.2:** Έστω  $F$  μια επιφάνεια Seifert που προκύπτει από ένα κανονικό διάγραμμα  $D$  και  $M_F$  ο πίνακας Seifert της  $F$ . Τότε υπάρχει ένα διάγραμμα  $D_0$  τέτοιο ώστε:

- (1) Το  $D_0$  είναι ισοδύναμο με το  $D$ .
- (2) Μόνο μία επιφάνεια Seifert  $F_0$  προκύπτει από το  $D_0$  και όλοι οι δίσκοι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (βλ Σχήμα 4.14)
- (3) Ο πίνακας Seifert της  $F_0$ ,  $M_{F_0}$ , είναι  $\Lambda_1$ -ισοδύναμος με τον  $M_F$  (δηλ ο ένας προκύπτει από τον άλλον αν εφαρμοστεί η πράξη  $\Lambda_1$  πεπερασμένες φορές).

#### Απόδειξη Πρότασης 4.4.1

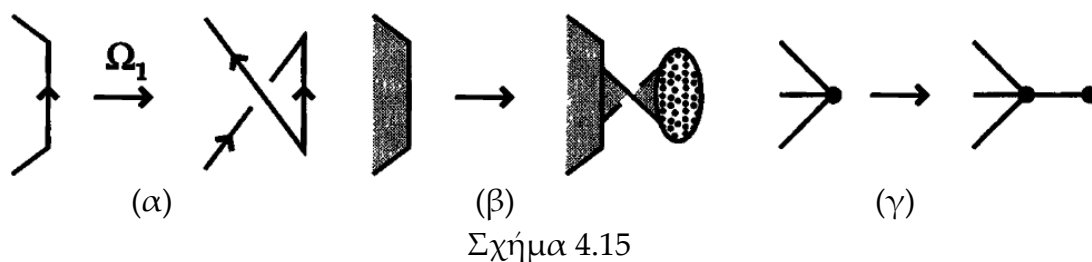
Η απόδειξη βασίζεται στην εξέταση διάφορων περιπτώσεων, από τις οποίες μπορεί να εξαχθεί η επίδραση της κάθε κίνησης Reidemeister.



Η κίνηση Reidemeister που εφαρμόζεται είναι η  $\Omega_1$

Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

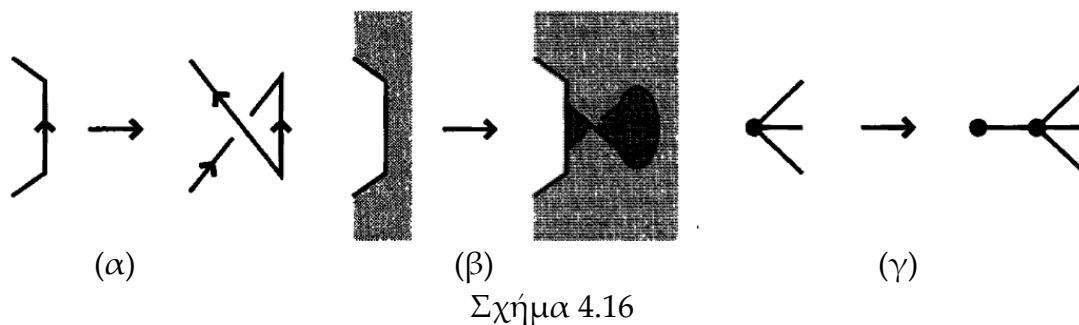
(i) Αυξάνουμε τον αριθμό των λωρίδων και των δίσκων κατά ένα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.15(β).



Στην περίπτωση αυτή το γένος της επιφάνειας δεν αλλάζει και ο γράφος Seifert που προκύπτει προσθέτει μόνο μία κορυφή και μια ακμή (Σχήμα 4.15(γ)). Συνεπώς δε δημιουργείται νέα περιοχή, άρα ο πίνακας Seifert δε θα μεταβληθεί.

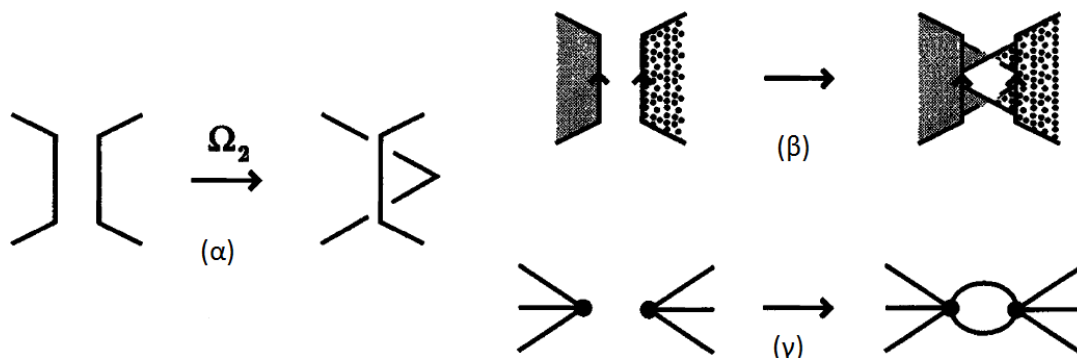
(ii) Η κίνηση γίνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.16

Με τη συλλογιστική της περίπτωσης (i) και σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας Seifert μένει αμετάβλητος.



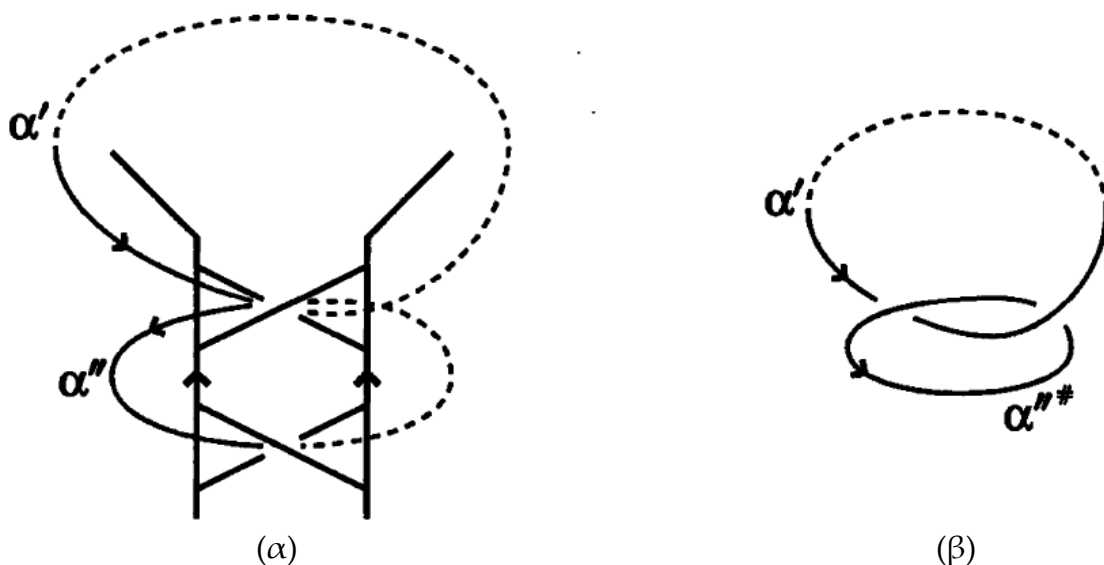
Η κίνηση Reidemeister που εφαρμόζεται είναι η  $\Omega_2$

Χαρακτηριστική περίπτωση είναι αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 4.17, όπου ο αριθμός των δίσκων παραμένει σταθερός, αλλά οι λωρίδες αυξάνονται κατά δύο.



Σχήμα 4.17

Εάν οι αρχική επιφάνεια Seifert  $F$  δεν είναι συμπαγής, αλλά η νέα επιφάνεια  $F'$  είναι, τότε οι δύο αυτές επιφάνειες είναι  $S$ -ισοδύναμες. Το γένος της  $F'$  δίνεται από τη σχέση  $g(F') = g(F) + 1$ . Έτσι, σε σύγκριση με την  $F$  η  $F'$  έχει δύο επιπλέον κλειστές καμπύλες τις οποίες συμβολίζουμε με  $\alpha'$  και  $\alpha''$ , Σχήμα 4.18.



Σχήμα 4.18

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι δύο νέες λωρίδες είναι οι τελικές λωρίδες που συνδέουν τους δίσκους  $D'$  και  $D''$ . Ο νέος πίνακας Seifert  $M'$ , έχει σε σχέση με τον  $M$  δύο επιπλέον σειρές και στήλες όπως φαίνεται στη συνέχεια. Επισημαίνεται ότι  $lk(\alpha', \alpha''\#) = 1$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.18(β).





$$M' = \begin{bmatrix} & & & b_1 & 0 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & b_m & 0 \\ b'_1 & \cdots & b'_m & b & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου  $b_i$  ο αριθμός συνέλιξης μεταξύ των κλειστών καμπυλών  $\alpha_i$  στην  $F$  και  $\alpha_i^\#$ ,  $b'_i$  ο αριθμός συνέλιξης μεταξύ  $\alpha'$  και  $\alpha_i^\#$  και  $b = lk(\alpha' \alpha_i^\#)$ .

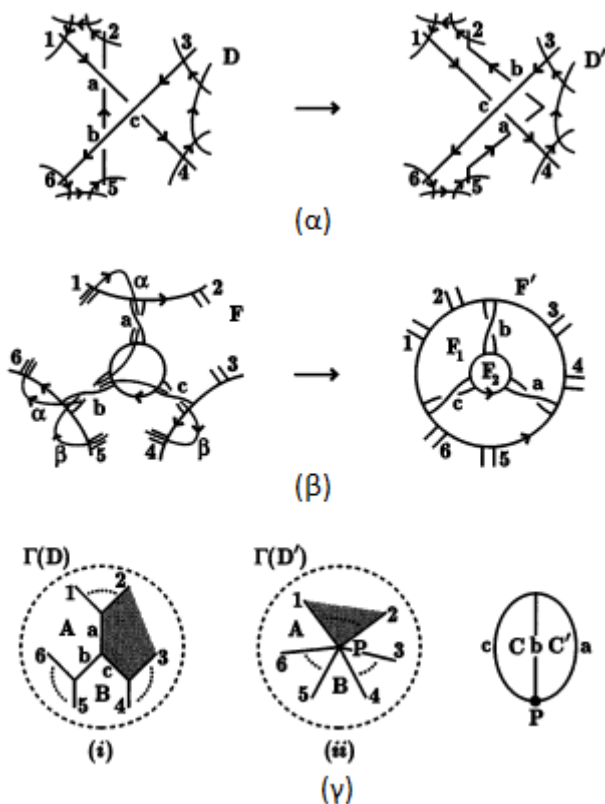
Εάν εφαρμόσουμε την πράξη  $\Lambda_1$  στον  $M'$  θα προκύψει

$$M'' = \begin{bmatrix} & & & b_1 & 0 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & b_m & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αυτό που έχουμε λοιπόν αποδείξει, είναι ότι ο πίνακας Seifert  $M'$  που προκύπτει από την επιφάνεια  $F'$ , μπορεί να ληφθεί εφαρμόζοντας αρχικά μια πράξη  $\Lambda_2$  στον πίνακα Seifert  $M$  της επιφάνειας  $F$  και στη συνέχεια εφαρμόζοντας την πράξη  $\Lambda_1$  αρκετές φορές. Συνεπώς οι πίνακες Seifert που προκύπτουν από τις επιφάνειες  $F$  και  $F'$  είναι S-ισοδύναμοι.

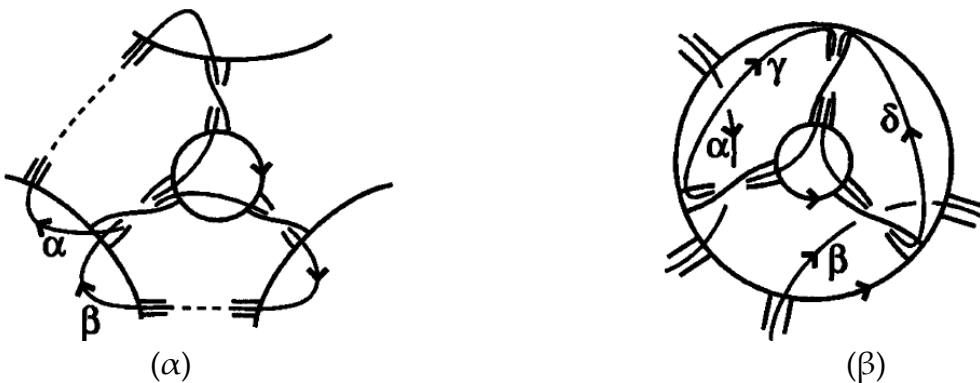
Η κίνηση Reidemeister που εφαρμόζεται είναι η  $\Omega_3$

Στο Σχήμα 4.19 οι αριθμοί 1, 2, ..., 6 και τα γράμματα a, b, c αντιστοιχούν σε σημεία διασταύρωσης και οι γράφοι Seifert  $\Gamma(D)$  και  $\Gamma(D')$  είναι πανομοιότυποι, εκτός της περιοχής εντός των διακεκομμένων κύκλων.



Σχήμα 4.19

Λόγω της κατασκευής της  $F'$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι επιφάνειες  $F$  και  $F'$  είναι πανομοιότυπες εκτός ελαχίστων σημείων. Η ακριβής φύση των σημείων φαίνεται καλύτερα στους αντίστοιχους γράφους Seifert αφού αντιστοιχούν ακριβώς στο εσωτερικό των διακεκομμένων κύκλων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.19(γ). Στο Σχήμα αυτό φαίνεται ότι οι  $F$  και  $F'$  έχουν τον ίδιο αριθμό από λωρίδες, αλλά η  $F$  έχει 2 επιπλέον δίσκους (οι δίσκοι αντιστοιχούν σε κορυφές, ενώ οι λωρίδες σε ακμές στους γράφους Seifert).



Σχήμα 4.20



Εάν θεωρήσουμε τη σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 4.19 ως αυτή που αντιστοιχεί στην εξωτερική περιοχή, τότε όταν ο δίσκος  $F_2$  βρίσκεται επάνω από τον  $F_1$ , βλ. Σχήμα 4.20, οι πίνακες Seifert παίρνουν τις εξής μορφές:

$$M_F = \begin{bmatrix} N & N' & 0 \\ N'' & p & -1 \\ & -1 & q \end{bmatrix}$$

$$M_{F'} = \begin{bmatrix} N & N' & 0 & 0 \\ N'' & p & 0 & 0 \\ & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι τελευταίες δύο γραμμές και στήλες του  $M_F$  αντιστοιχούν στις κλειστές καμπύλες  $\alpha$  και  $\beta$  οι οποίες οριοθετούν τις περιοχές  $A, B$  στον  $\Gamma(D)$ , βλ Σχήματα 4.19(γ) και 4.20(α), ενώ οι τέσσερις τελευταίες σειρές και στήλες του  $M_{F'}$  αντιστοιχούν στις τέσσερις καμπύλες  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  που οριοθετούν τις περιοχές  $A, B, C, C'$  στον  $\Gamma(D')$  βλ Σχήματα 4.19(γ) και 4.20(β).

Αν αφαιρέσουμε την προτελευταία σειρά που αντιστοιχεί στο  $\gamma$  από την τρίτη από το τέλος που αντιστοιχεί στο  $\beta$  στον πίνακα  $M_{F'}$  και κάνουμε το ίδιο στις αντίστοιχες στήλες θα πάρουμε το εξής:

$$M_{F'} = \begin{bmatrix} N & N' & 0 & 0 \\ N'' & p & 0 & 0 \\ & -1 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

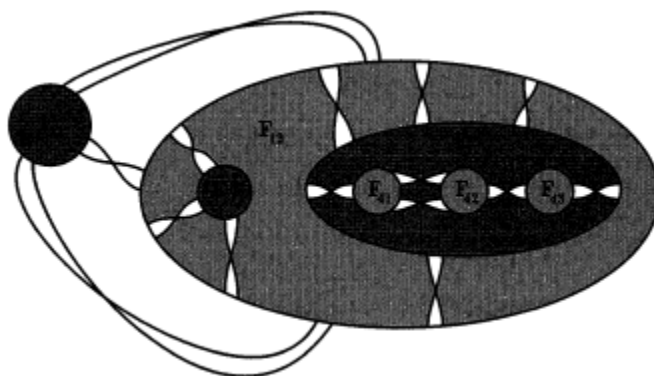
Ο πίνακας αυτός όμως εφαρμόζοντας την πράξη  $\Lambda_2^{-1}$  μπορεί να μετασχηματιστεί στον  $M_F$  άρα οι δύο πίνακες αυτοί είναι  $S$ -ισοδύναμοι.

#### Απόδειξη πρότασης 4.4.2

Στο Σχήμα 4.21 η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου ένας δίσκος βρίσκεται μέσα σε έναν άλλον, πχ ο  $F_{12}$  στον  $F_{31}$ . Για να αποδειχτεί η πρόταση αρκεί να αντικατασταθεί αυτός ο δίσκος με έναν άλλον στενό, ο οποίος προκύπτει από κινήσεις

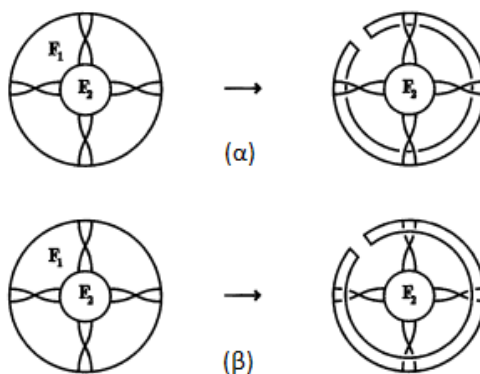


Reidemeister. Αυτό γίνεται έτσι ώστε, αν η  $F_2$  βρίσκεται επάνω από την  $F_1$ , τότε ο δίσκος που προκύπτει είναι κάτω από όλες τις λωρίδες που συνδέουν τους  $F_1$  και  $F_2$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.22(α). Αν η  $F_2$  βρίσκεται κάτω από την  $F_1$  τότε ο στενός δίσκος είναι επάνω από τις λωρίδες όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.22(β).

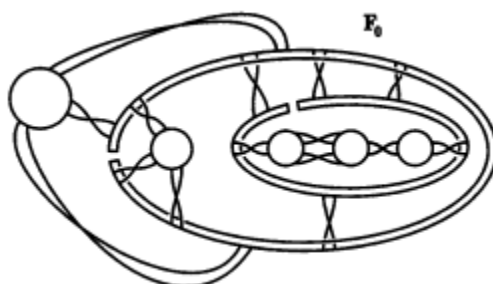


Σχήμα 4.21

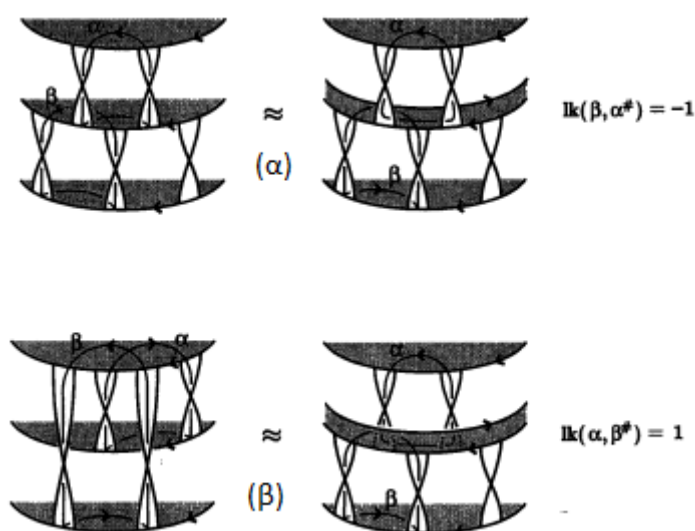
Εάν επαναληφθεί η διαδικασία τελικά θα καταλήξουμε σε μια επίπεδη επιφάνεια. Για παράδειγμα στο Σχήμα 4.21, αν υποθέσουμε ότι η  $F_{21}$  είναι επάνω από την  $F_{12}$ , η  $F_{31}$  κάτω από την  $F_{12}$ , οι  $F_{41}$ ,  $F_{42}$ ,  $F_{43}$ , επάνω από την  $F_{31}$ , τότε η επιφάνεια μπορεί να μετασχηματιστεί στην  $F_0$  που φαίνεται στο Σχήμα 4.23. Αυτό πλέον είναι εύκολο να διαπιστωθεί με τη βοήθεια του Σχήματος 4.24 ότι η  $F_0$  έχει τον ίδιο πίνακα Seifert με την  $F$ .



Σχήμα 4.22



Σχήμα 4.23



Σχήμα 4.24

#### 4.5 Το πολυώνυμο Alexander από τον πίνακα Seifert

Για να υπάρχει μια αναλλοίωτη που προκύπτει από έναν πίνακα Seifert, θα πρέπει να αυτή να μην επηρεάζεται από τις πράξεις  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2^{\pm 1}$ . Γρήγορα γίνεται αντιληπτό ότι ο πίνακας Seifert διαθέτει ιδιότητες που μπορούν να οδηγήσουν στο να εξαχθεί μια αναλλοίωτη. Αν γίνει συμμετρικός ο πίνακας  $M$  ούτως ώστε να κατασκευαστεί ο πίνακας - άθροισμα  $M+M^T$ , μπορούμε στη συνέχεια να διαπιστώσουμε κάτι σημαντικό για την ορίζουσα αθροίσματος αυτού.

##### Πρόταση 4.5.1

Αν  $M$  ο πίνακας Seifert ενός κόμβου (ή κρίκου)  $K$ , τότε  $|\det(M + M^T)|$  είναι αναλλοίωτη του  $K$ . Η αναλλοίωτη αυτή ονομάζεται ορίζουσα του  $K$ .



### Απόδειξη

Αυτό που χρειάζεται να αποδειχθεί είναι ότι η ορίζουσα δεν επηρεάζεται αν εφαρμόσουμε τις πράξεις  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$ . Έτσι:

i)  $\Lambda_1$ :

$$\begin{aligned} |\det[\Lambda_1(M + M^T)]| &= |\det[PMP^T + (PMP^T)^T]| = |\det(PMP^T + PM^T P^T)| = \\ &= |\det(P(M + M^T)P^T)| = |\det(P)||\det(M + M^T)||\det(P^T)| = \\ &= |\det(M + M^T)| \end{aligned}$$

ii)  $\Lambda_2$ :

$$\begin{aligned} |\det[\Lambda_2(M + M^T)]| &= \left| \det \begin{bmatrix} & M & * & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & M^T & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} & M + M^T & * & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ * & \dots & * & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \dots = \left| \det \begin{bmatrix} & M + M^T & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \left| -\det \begin{bmatrix} & M + M^T & * \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \\ &= |\det(M + M^T)| \end{aligned}$$

### Πρόταση 4.5.2

Έστω  $M$  ο πίνακας Seifert ενός κόμβου (αλλά όχι κρίκου  $K$ ), τότε:

$$\det(M - M^T) = 1$$

Αν τώρα πάρουμε την ορίζουσα του  $(M - tM^T)$  μπορούμε να εξετάσουμε την επίδραση που έχουν οι πράξεις  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$  σε αυτό.

i)  $\Lambda_1$ :

$$\det[\Lambda_1(M - tM^T)] = \det[PMP^T - t(PMP^T)^T] = \det(PMP^T - tPM^T P^T)$$



$$= \det[P(M - tM^T)P^T] = \det(M - tM^T),$$

δηλ, δεν επηρεάζεται από την πράξη  $\Lambda_1$

ii)  $\Lambda_2$ :

$$\begin{aligned} \det[\Lambda_2(M - tM^T)] &= \det \begin{bmatrix} M - tM^T & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -t & 0 \end{bmatrix} = \\ &= t \det \begin{bmatrix} M - tM^T & 0 \\ \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 1 \end{bmatrix} = \dots = t \det \begin{bmatrix} M - tM^T & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= t \det(M - tM^T) \end{aligned}$$

Ομοίως, προκύπτει ότι  $\det[\Lambda_2^{-1}(M - tM^T)] = t^{-1} \det(M - tM^T)$

#### Θεώρημα 4.5.1

Έστω  $M_1$  και  $M_2$  δύο πίνακες Seifert ενός κόμβου (ή κρίκου). Αν  $r$  και  $s$  η τάξη των  $M_1$  και  $M_2$  αντίστοιχα, τότε:

$$t^{-\frac{r}{2}} \det(M_1 - tM_1^T) = t^{-\frac{s}{2}} \det(M_2 - tM_2^T)$$

Έτσι, αν  $M$  ένας πίνακας Seifert του κόμβου  $K$  η τάξη του οποίου είναι ίση με  $k$ , τότε η  $t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T)$  αποτελεί αναλλοίωτη του  $K$ . Η αναλλοίωτη αυτή είναι το πολυώνυμο Alexander και συμβολίζεται με  $\Delta_K(t)$ .



## 5. Το πολυώνυμο Alexander ως αναλλοίωτη

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκε ένα πολυώνυμο που υπολογίζεται από το διάγραμμα ενός κόμβου. Επίσης αποδείχτηκε ότι τα πολυώνυμα που προκύπτουν από δύο διαφορετικούς κόμβους είναι επίσης διαφορετικά.

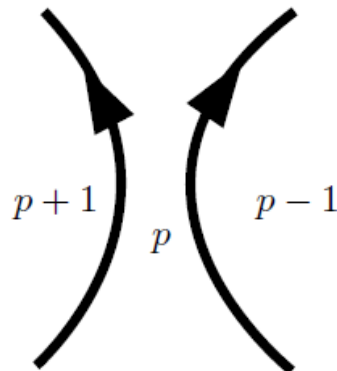
Η απόδειξη δόθηκε από το paper του Alexander “Topological invariants of knots and links”. Η κύρια ιδέα σχετίζεται με την εύρεση ισοδυναμίας μεταξύ πινάκων. Αυτό που χρειάζεται να αποδειχτεί είναι ότι ισοδύναμα διαγράμματα κόμβων θα πρέπει να δίνουν ισοδύναμους πίνακες και στη συνέχεια ισοδύναμοι πίνακες να έχουν ορίζουσες οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους κατά  $\pm k$ . Συνεπώς, ένα κανονικοποιημένο πολυώνυμο Alexander είναι αναλλοίωτη κόμβων.

### 5.1 Ο δείκτης μιας περιοχής

Ο Alexander αντιστοιχεί έναν ακέραιο για κάθε περιοχή του διαγράμματος του κόμβου, ο οποίος ονομάζεται δείκτης της περιοχής. Αυτοί οι ακέραιοι ορίζονται αντιστοιχίζοντας οποιονδήποτε ακέραιο  $p$  σε μια επιλεγμένη περιοχή και στη συνέχεια καθορίζοντας τους δείκτες για τις εναπομένουσες περιοχές ως εξής όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1:

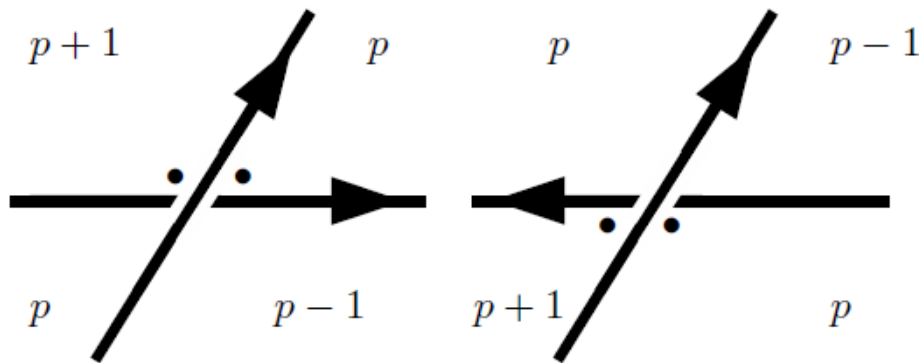
- Αν διασταυρώνουμε την περιοχή από δεξιά προς τα αριστερά (σε σχέση με τον προσανατολισμό του διαγράμματος, ο δείκτης είναι ίσος με  $p+1$ )
- Αν διασταυρώνουμε την περιοχή από αριστερά προς τα δεξιά (σε σχέση με τον προσανατολισμό του διαγράμματος, ο δείκτης είναι ίσος με  $p-1$ )





Σχήμα 5.1

Από τη στιγμή που όλες οι περιοχές είναι προσβάσιμες περνώντας από τις ακμές του διαγράμματος, η διαδικασία καθορίζει τους δείκτες όλων των περιοχών του. Αν εστιάσουμε στα σημεία διασταύρωσης του διαγράμματος θα παρατηρήσουμε ότι σε κάθε ένα από αυτά θα υπάρχουν δύο περιοχές με τον ίδιο δείκτη, έστω  $p$ , μια περιοχή με δείκτη  $p+1$  και μια περιοχή με δείκτη  $p-1$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2

Στην αριστερόχειρη διασταύρωση, η πρώτη περιοχή με κουκκίδα έχει δείκτη  $p$  και η δεύτερη  $p+1$ . Αντίστοιχα, στη δεξιόχειρη διασταύρωση, η πρώτη περιοχή με κουκκίδα έχει δείκτη  $p+1$  και η δεύτερη  $p$ . Εφόσον κάθε περιοχή έχει έναν δείκτη, όταν αναπαρασταθούν οι εξισώσεις του διαγράμματος του κόμβου σε έναν πίνακα, κάθε στήλη του θα έχει έναν αντίστοιχο δείκτη.



## 5.2 Ο τετραγωνικός πίνακας

Όπως και στην περίπτωση του υπολογισμού του πολυωνύμου Alexander, όπου αφαιρούνταν δύο στήλες του πίνακα που αφορούσαν γειτονικές περιοχές στο διάγραμμα του κόμβου έτσι και σε αυτήν την περίπτωση, δύο γειτονικές περιοχές θα έχουν δείκτες που διαφέρουν κατά ένα και συνεπώς μπορούν να αφαιρεθούν. Γενικεύοντας, οποιεσδήποτε δύο στήλες των οποίων οι δείκτες διαφέρουν κατά ένα μπορούν να αφαιρεθούν.

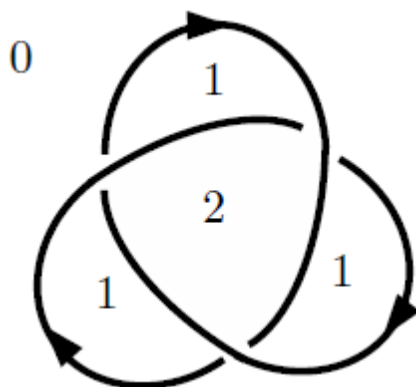
**Πρόταση 5.2.1:** Αν μειώσουμε τον πίνακα  $M$  σε τετράγωνο  $M_{p,q}$  αφαιρώντας δύο από τις στήλες του με δείκτες  $p$  και  $p+1$ , οι ορίζουσες των δύο αυτών πινάκων θα διαφέρουν κατά έναν συντελεστή  $\pm t^k$ , όποιες και να είναι οι στήλες αυτές.

**Απόδειξη:** Έστω  $R_p$  το άθροισμα όλων των στηλών που έχουν δείκτη  $p$ . Τότε, από τη στιγμή που κάθε γραμμή του πίνακα έχει ένα  $t$ , ένα  $-t$ , ένα  $1$  και ένα  $-1$  θα ισχύει:

$$\sum_p R_p = 0$$

, όπου με το  $0$  εννοούμε τον πίνακα-στήλη  $0$ .

Για παράδειγμα στον κόμβο trefoil (Σχήμα 5.3):



Σχήμα 5.3



Ορίζουμε το δείκτη της περιοχής  $r_0=0$ . Συνεπώς εφαρμόζοντας τη διαδικασία συμπλήρωσης των δεικτών για κάθε περιοχή προκύπτει ότι οι  $r_1, r_2$  και  $r_3$  έχουν δείκτη 1 και η περιοχή  $r_4$  έχει δείκτη ίσο με 2. Έτσι:

$$R_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}, R_0 = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ -t \end{pmatrix}$$

και  $R_2 + R_1 + R_0 = 0$ .

Αν πολλαπλασιαστεί κάθε στήλη με δείκτη  $p$  με έναν συντελεστή  $t^p$ , αφού κάθε στήλη του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα σημείο διασταύρωσης και σε κάθε σημείο διασταύρωσης οι δείκτες των περιοχών είναι καθορισμένες, έχουμε:

$$c_L(r) = t \cdot t^{-p} r_j - t \cdot t^{-(p+1)} r_k + t^{-p} r_l - t^{-(p-1)} r_m$$

για αριστερόχειρη διασταύρωση και:

$$c_R(r) = t \cdot t^{-(p+1)} r_j - t \cdot t^{-p} r_k + t^{-(p-1)} r_l - t^{-p} r_m$$

για δεξιόχειρη διασταύρωση.

Και στις δύο περιπτώσεις, το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με μηδέν. Επίσης, το άθροισμα των στηλών του πίνακα θα είναι και πάλι ο μηδενικός πίνακας. Δηλ

$$\sum_p t^{-p} R_p = 0$$

Αν συνδυάσουμε τα δύο αθροίσματα θα έχουμε:

$$\sum_p (t^{-p} - 1) R_p = 0$$

Επισημαίνεται ότι αφού  $t^0=1$ , οι όροι στο  $R_0$  στο άθροισμα αλληλοαναιρούνται. Έτσι βλέπουμε από το ανωτέρω άθροισμα ότι αν  $r_j$  μια περιοχή με δείκτη  $p$  και στήλη  $u_j$ , τότε η  $(t^p-1) u_j$  μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων στηλών με μη μηδενικούς δείκτες. Επίσης, οι συντελεστές των στηλών στο γραμμικό συνδυασμό είναι της μορφής  $-(t^q-1)$  για κάθε στήλη με δείκτη  $q$ .



Αν εξετάσουμε τους πίνακες  $M_{0,j}$  και  $M_{0,k}$ , όπου οι στήλες  $v_j$  και  $v_k$  έχουν δείκτες  $p$  και  $q$  αντίστοιχα, τότε λόγω του ανωτέρου αποτελέσματος και των ιδιοτήτων των οριζουσών ισχύει:

$$(t^{-q} - 1)\Delta_{0,j}(t) = \pm(t^{-p} - 1)\Delta_{0,k}(t)$$

Αφού οι δείκτες στις περιοχές καθορίζονται από μια αυξανόμενη σταθερά, (μπορούμε να θέσουμε ως  $p$  όποιον αριθμό επιθυμούμε), εάν  $v_i$  και  $v_m$  δύο επιπλέον στήλες του πίνακα  $M$  των δεικτών  $r$  και  $s$  αντίστοιχα, θα έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$(t^{r-q} - 1)\Delta_{i,j}(t) = \pm(t^{r-p} - 1)\Delta_{i,k}(t)$$

$$(t^{q-s} - 1)\Delta_{k,l}(t) = \pm(t^{q-r} - 1)\Delta_{k,m}(t)$$

Από τις ανωτέρω προκύπτει:

$$\Delta_{i,j}(t) = \pm \frac{(t^{q-r})(t^{r-p} - 1)}{(t^{q-s} - 1)} \Delta_{k,m}(t)$$

Τέλος, αν θέσουμε  $p=r+1$  και  $s=q+1$  έχουμε:

$$\Delta_{i,j}(t) = \pm t^{q-r} \Delta_{k,m}(t)$$

Δηλαδή, οποτεδήποτε αφαιρούμε δύο στήλες από τον πίνακα με συνεχόμενους δείκτες, η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει διαφέρει κατά  $\pm t^{q-r}$ .

### 5.3 e-ισοδύναμοι πίνακες

Επειδή διαφορετικά διαγράμματα του ίδιου κόμβου θα δίνουν διαφορετικούς πίνακες, είναι λογικό να απαιτείται ο ορισμός μιας ισοδυναμίας μεταξύ των πινάκων αυτών, ούτως ώστε από έναν κόμβο να προκύπτει πάντα μια ισοδύναμη κλάση πινάκων.

**Ορισμός 5.3.1:** Δύο πίνακες  $M_1$  και  $M_2$  είναι e-ισοδύναμοι, αν είναι δυνατόν να προκύψει ο ένας από τον άλλον εκτελώντας μια σειρά από τις εξής πράξεις:



- (α) Πολλαπλασιασμός μιας σειράς ή στήλης με το -1
- (β) Ανταλλαγή δύο γραμμών ή στηλών
- (γ) Πρόσθεση μιας σειράς ή στήλης σε μια άλλη
- (δ) Πρόσθεση ή αφαίρεση ενός ορίου όπου το γωνιακό στοιχείο είναι 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι 0, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{pmatrix}$$

- (ε) Πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας μια στήλη με το t

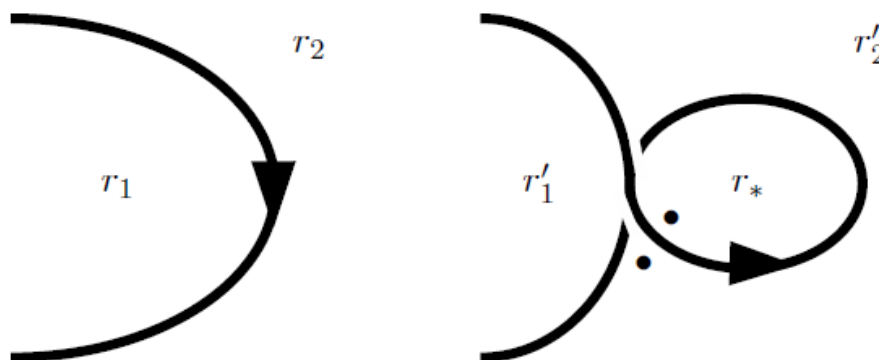
Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι οι παραπάνω πράξεις αλλάζουν την ορίζουσα ενός πίνακα το πολύ κατά  $\pm t^k$ . Συνεπώς, οποιοδήποτε δύο ε-ισοδύναμοι πίνακες έχουν ορίζουσες οι οποίες διαφέρουν το πολύ κατά  $\pm t^k$ .

Γνωρίζουμε ήδη ότι τα διαγράμματα δύο κόμβων είναι ισοδύναμα, αν από το ένα μπορούμε να καταλήξουμε στο δεύτερο μέσω μιας σειράς κινήσεων Reidemeister. Θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία πρόταση για να δείξουμε ότι ισοδύναμοι κόμβοι έχουν ε-ισοδύναμους πίνακες Alexander.

**Θεώρημα 5.3.1:** Αν δύο διαγράμματα  $D_1$  και  $D_2$  αναπαριστούν δύο κόμβους του ίδιου τύπου, τότε οι τετραγωνικοί πίνακές τους  $M_1$  και  $M_2$  είναι ε-ισοδύναμοι.

Η απόδειξή του προκύπτει από την εξέταση της επίδρασης που έχουν οι κινήσεις Reidemeister στον πίνακα του διαγράμματος ενός κόμβου.

(I) Στην αρχή το διάγραμμα έχει τις περιοχές  $r_1$  και  $r_2$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3α. Εκτελώντας μια κίνηση Reidemeister I προκύπτει μια νέα περιοχή, η  $r^*$  και προστίθεται ένα νέο σημείο διασταύρωσης στο διάγραμμα του κόμβου (Σχήμα 5.4).



Σχήμα 5.4

Έστω ότι ο πίνακας Alexander του κόμβου πριν από την αλλαγή ήταν  $M$ . Τότε η κίνηση Reidemeister I θα έχει ως αποτέλεσμα την πρόσθεση μιας νέας σειράς και μιας νέας στήλης στον πίνακα  $M$  ως εξής:

$$\begin{pmatrix} r_* & r'_1 & r'_2 & \dots & \dots \\ -t & -1 & t+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & M & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Αφού οι στήλες  $r'_1$  και  $r'_2$  είναι γειτονικές, μπορούμε να τις αφαιρέσουμε από τον πίνακα χωρίς να αλλάξουμε την αναλλοίωτη του κόμβου. Συνεπώς ο πίνακας που προκύπτει είναι ο εξής:

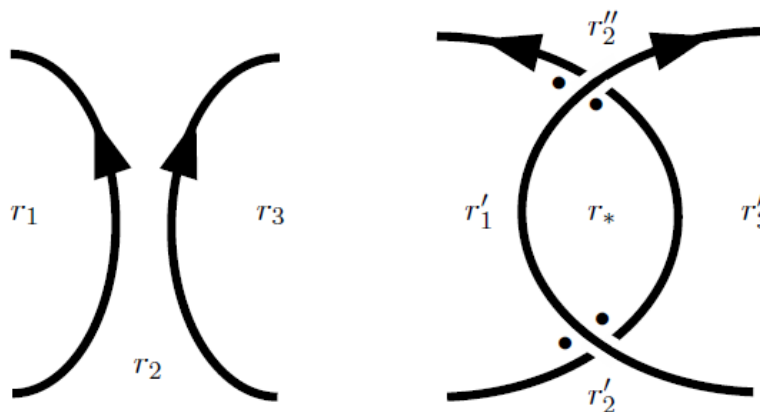
$$\begin{pmatrix} r_* & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{1,2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Αφαιρώντας στη συνέχεια την πρώτη στήλη και την πρώτη γραμμή σύμφωνα με την πράξη (δ) του Ορισμού 5.3.1, προκύπτει ο πίνακας  $M_{1,2}$ , δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας του πολυωνύμου Alexander του αρχικού κόμβου. Συνεπώς η  $\Delta_k$  δεν επηρεάζεται από την κίνηση Reidemeister I.

(II) Σε αυτήν την περίπτωση ξεκινούμε με ένα διάγραμμα που έχει τις περιοχές  $r_1, r_2, r_3, \dots$ . Η κίνηση Reidemeister II δημιουργεί δύο νέα



σημεία διασταύρωσης, μία νέα περιοχή  $r_*$ , και χωρίζει την περιοχή  $r_2$  σε δύο νέες,  $r'_1$  και  $r'_2$  (Σχήμα 5.5).



Σχήμα 5.5

Ο πίνακας μετά την εκτέλεση της κίνησης θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{pmatrix} r_* & r'_1 & r'_2 & r''_2 & r_3 & \dots & \dots & \dots \\ -t & t & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & -t & 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & | & | & | & & & & \\ \vdots & u & v & w & & & M_{1,2} & \\ 0 & | & | & | & & & & \end{pmatrix}$$

Σε αυτόν τον πίνακα,  $u$  είναι η στήλη για την περιοχή  $r_1$  στον αρχικό πίνακα και τα στοιχεία της περιοχής  $r_2$  χωρίζονται στα  $v$  και  $w$  (αφού η εν λόγω περιοχή χωρίζεται στα δύο). Επιλέγουμε να αφαιρέσουμε τις στήλες που αντιστοιχούν στις περιοχές  $r'_1$  και  $r'_2$ , συνεπώς ο πίνακας παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{pmatrix} -t & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & v & & & M_{1,2} & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε την πρώτη στήλη με  $t$  και προσθέτουμε την πρώτη σειρά στη δεύτερη:



$$\left( \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & v & & & M_{1,2} & \\ 0 & | & & & & \end{array} \right)$$

Ομοίως προσθέτουμε την πρώτη στήλη στην τρίτη και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με το -1:

$$\left( \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & v & & & M_{1,2} & \\ 0 & | & & & & \end{array} \right)$$

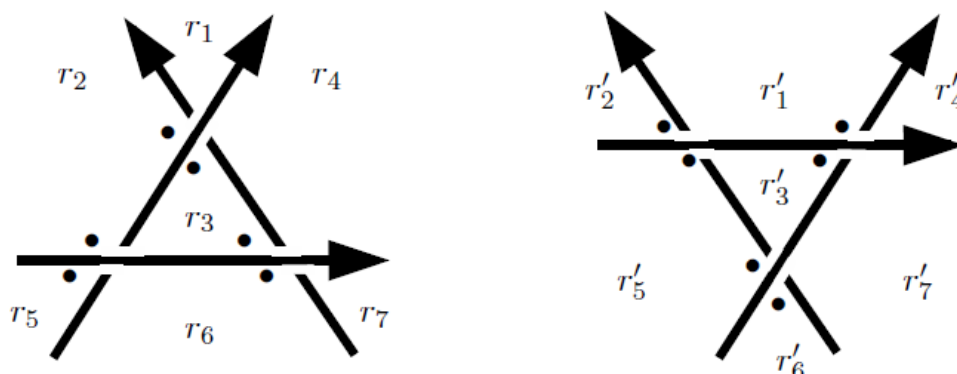
Τώρα μπορούμε να αφαιρέσουμε το όριο του πίνακα:

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & & & & \\ v & & & M_{1,2} & \\ | & & & & \end{array} \right)$$

Όλα τα στοιχεία της  $v$  της πρώτης στήλης μπορούν να αφαιρεθούν με μια σειρά από πράξεις (α)-(ε) του ορισμού 3.2. Μπορεί η γραμμή 1 του πίνακα να πολλαπλασιάζεται κάθε φορά με την απαραίτητη δύναμη του  $t$ , να προστεθεί η γραμμή 1 σε άλλη γραμμή του πίνακα και τέλος να διαιρεθεί η γραμμή 1 με την ίδια δύναμη του  $t$ . Με αυτόν τον τρόπο ο πίνακας  $M_{1,2}$  θα καταλήξει να έχει ένα όριο, όπως αυτό περιγράφεται στην πράξη (δ) και ως εκ τούτου αυτό μπορεί να αφαιρεθεί. Συνεπώς αυτό που απομένει πάλι είναι ο πίνακας  $M_{1,2}$ .

(III) Στην περίπτωση της κίνησης Reidemeister III, το πλήθος των περιοχών παραμένει σταθερό. Αυτό που αλλάζει είναι τα στοιχεία γύρω από τα σημεία διασταύρωσης (Σχήμα 5.6).





Σχήμα 5.6

Πριν την κίνηση Reidemeister, ο πίνακας που προκύπτει από το διάγραμμα του κόμβου θα έχει την εξής μορφή:

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & \dots & \dots \\ -1 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 & 0 & -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u & v & \vdots & w & x & y & z & & X & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

,με  $X$  το τμήμα που αντιστοιχεί στο υπόλοιπο τμήμα του διαγράμματος του κόμβου. Μετά την εκτέλεση της κίνησης Reidemeister III ο πίνακας θα έχει την εξής μορφή:

$$M' = \begin{pmatrix} r'_1 & r'_2 & r'_3 & r'_4 & r'_5 & r'_6 & r'_7 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t & -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & 0 & -t & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & t & 1 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u & v & \vdots & w & x & y & z & & X & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

Επειδή σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να γίνουν πράξεις σε πίνακες μεγάλης διάστασης, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση για απλοποίηση των πράξεων:



**Πρόταση 5.2.1:** Ο πίνακας  $N$  που προκύπτει αλλάζοντας τα πρόσημα όλων των αρνητικών στοιχείων ενός πίνακα  $M$  είναι ε-ισοδύναμος με τον πίνακα  $M$ .

Η ανωτέρω πρόταση αποδεικνύεται εύκολα αν αναλογιστεί κανείς τον τρόπο που κατανέμονται οι δείκτες στις περιοχές γύρω από κάθε σημείο διασταύρωσης. Οι δείκτες αυτοί καθώς διατρέχουν τις περιοχές γίνονται θετικοί-αρνητικοί κοκ. Έτσι σε κάθε διασταύρωση οι μονές περιοχές θα είναι θετικές και οι ζυγές αρνητικές ή το αντίθετο. Ως εκ τούτου, οι εγγραφές στον πίνακα που προκύπτει θα ακολουθούν την ίδια μορφή. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε μονή στήλη με  $-1$ , κάθε γραμμή θα έχει μόνο θετικές ή μόνο αρνητικές εγγραφές. Τέλος, αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις αρνητικές γραμμές με  $-1$  θα προκύψει ένας εξ ολοκλήρου θετικός πίνακας.

Από τα ανωτέρω ο πίνακας  $M$  μπορεί να γραφτεί και ως:

$$N = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & & \dots & \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u' & v' & \vdots & w' & x' & y' & z' & & & X' \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

,όπου  $u' - z'$  οι στήλες  $u - z$  με αλλαγμένα όλα τα αρνητικά πρόσημα θετικά (και αναλόγως στο  $X'$ ). Ο στόχος είναι αν βρεθεί μια σειρά από κινήσεις (α) έως (ε) οι οποίες θα μετασχηματίσουν τον ανωτέρω πίνακα στον εξής:

$$N' = \begin{pmatrix} r'_1 & r'_2 & r'_3 & r'_4 & r'_5 & r'_6 & r'_7 & & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u' & v' & \vdots & w' & x' & y' & z' & & & X' \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

Για εξοικονόμηση χώρου, στους επόμενους υπολογισμούς και χωρίς να επηρεαστεί η γενίκευση, θα απεικονίζονται οι πρώτες τρεις σειρές και οι



πρώτες 7 στήλες του πίνακα N. Για να αποφευχθεί ακούσια αλλαγή των στοιχείων των  $w' - z'$ , μόνο η στήλη  $r_3$  θα μπορεί να προστεθεί στις υπόλοιπες στήλες, να πολλαπλασιαστεί με το -1 ή το t.

Αρχικά, εναλλάσσουμε την 1<sup>η</sup> με την 3<sup>η</sup> στήλη:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2<sup>η</sup> σειρά με -t:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & -t & 0 & -t^2 & -t & 0 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε την 1<sup>η</sup> στήλη στη 2<sup>η</sup>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Διαιρούμε την 3<sup>η</sup> στήλη με το t:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αφαιρούμε την 3<sup>η</sup> στήλη από την 4<sup>η</sup>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3<sup>η</sup> στήλη με το t:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε την 3<sup>η</sup> σειρά επί t στη 2<sup>η</sup> σειρά:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & t^2 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Προσθέτουμε την 3<sup>η</sup> στήλη στην 5<sup>η</sup> στήλη:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & t & t & 1 \\ t & 0 & t^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Διαιρούμε την 3<sup>η</sup> στήλη δια  $t$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & t & t & 1 \\ t & 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από την ανωτέρω διαδικασία παρατηρούμε ότι προκύπτει τελικά ο πίνακας  $N'$ .

Αφού ξεκινώντας από τον πίνακα  $N$  καταλήξαμε στον  $N'$ , ισχύει ότι και το ότι είναι δυνατό αντίστοιχα από τον πίνακα  $M$  με μια ακολουθία από πράξεις (α) έως (ε) το ορισμού 3.2 να μεταβούμε στον πίνακα  $M'$ . Συνεπώς, η ορίζουσα του πίνακα Alexander δεν επηρεάζεται από κινήσεις Reidemeister III. Και εδώ, ο προσανατολισμός των ακμών μπορεί να αλλάξει τα στοιχεία του πίνακα, αλλά η μέθοδος καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα.

Συνοψίζοντας, αποδείχτηκε ότι με δεδομένο ένα συγκεκριμένο διάγραμμα ενός κόμβου, μπορούμε πάντα να εξάγουμε το ίδιο πολυώνυμο  $\Delta_k(t)$ , οποιεσδήποτε στήλες και να αποφασίσουμε να αφαιρέσουμε από τον πίνακα. Επίσης αποδείχτηκε ότι κάθε διάγραμμα του ίδιου κόμβου θα έχει ως αποτέλεσμα το ίδιο πολυώνυμο, καθώς αυτό μπορεί να παραμορφωθεί στο αρχικό με μια σειρά από κινήσεις Reidemeister. Σύμφωνα με την ανωτέρω απόδειξη, κάθε φορά που εκτελούμε μια κίνηση Reidemeister στο διάγραμμα ενός κόμβου, ο τετραγωνικός πίνακας που προκύπτει θα είναι ε-ισοδύναμος με τον αρχικό πίνακα.





## 6. Συμπεράσματα

Παρουσιάστηκαν δύο μέθοδοι υπολογισμού του πολυωνύμου Alexander. Στην αρχή αποδείχτηκε ότι το πολυώνυμο Alexander μπορεί να υπολογιστεί εξετάζοντας τα σημεία διασταύρωσης του κόμβου. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν προσανατολίσιμες επιφάνειες των οποίων το όριο είναι ο κόμβος για να αποδειχτεί ότι αυτές μπορούν να οδηγήσουν στο πολυώνυμο Alexander.

Το πολυώνυμο Alexander ήταν η πρώτη αναλλοίωτη – πολυώνυμο που χρησιμοποιήθηκε στη θεωρία κόμβων και έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του τομέα. Αρχικά υπολογίστηκε από τις επιφάνειες Seifert το 1927 και εκείνη την εποχή αποτελούσε ένα σημαντικό εργαλείο διαχωρισμού κόμβων. Το 1969 ο Conway ανακάλυψε έναν τρόπο να υπολογίζει το εν λόγω πολυώνυμο χρησιμοποιώντας σχέσεις skein. Αυτό προσέφερε έναν γρήγορο και απλό τρόπο υπολογισμού του πολυωνύμου. Παρόλο που δεν πρόκειται για την καλύτερη αναλλοίωτη, αποτελεί σημαντικό εργαλείο διαχωρισμού των κόμβων.





## Βιβλιογραφία

1. Adams C.C., *The Knot Book*, Freeman, New York, 1994.
2. Murasugi K., *Knot Theory and Its Applications*, translated by B. Kurpita, Birkhauser Boston, 1996.
3. Kauffman L. H., *Formal Knot Theory*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York 2006.
4. Alexander J. W., Topological invariants of knots and links, *Trans. Am. Math. Soc.* 30, 275-306, 1928.
5. Cromwel P., *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2004.
6. Gilbert N.D., Porter T., *Knots and Surfaces*, Oxford Uni. Press, 1994.
7. R.H. Crowell, R.H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics, No. 57, Springer, New York (1963).
8. R.H. Fox, A Quick Trip Through Knot Theory. *Proc. Top. Inst.*, pp.120–167
9. J. Hoste, A Polynomial Invariant of Knots and Links. *Pacific J. Math*, Vol. 124, No. 2, pp.295–320
10. C. Livingston, *Knot Theory*. Mathematical Association of America, Washington, DC, (1993)







## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την κυρία Σοφία Λαμπροπούλου, καθηγήτρια ΕΜΠ, για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί της, την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, την υπομονή και την στήριξη καθώς και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.